Invers matrix

En $n \times n$ matrix A siges at være **invertibel** hvis der findes en $n \times n$ matrix B så

$$AB = BA = I_n.$$

B siges da at være den **inverse** til A, skrives: $B = A^{-1}$.

Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ så har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\cdot\frac{1}{2} \\ 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\cdot\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = I_2$$

$$A^{-1} = B$$

$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ har løsning $\vec{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T = B^T =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Regneregler for invers matrix.

Lad A og B være invertible $n \times n$ matricer. Så er

- A^{-1} invertibel og $(A^{-1})^{-1} = A$,
- AB invertibel og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- A^T invertibel og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Elementære matricer

Lad A være en matrix med m rækker

Hvis E fremkommer fra I_m ved anvendelse af en elementær rækkeoperation
så fremkommer EA fra A ved anvendelse af den samme elementære rækkeoperation.

E siges da at være en **elementær matrix**.

EKS	Elementar matrix	Invers
$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$I_3 \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \to R_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$I_3 \xrightarrow{R_3 + 2R_1 \to R_3}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Enhver elementær matrix er invertibel.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved rækkeombytning så er $E^{-1} = E$.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved at skalere række i med en faktor $c \neq 0$ så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at skalere række i med en faktor $\frac{1}{c}$.

- Hvis E fremkommer fra I_n ved at addere c gange række i til række j så fremkommer E^{-1} fra I_n ved at addere $-c$ gange række i til række j.

Enhver matrix A kan omskrives til en matrix $R = \texttt{rref}(A)$ på reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer, der svarer til multiplikation med elementære matricer, hhv. $E_1, E_2, \ldots, E_k$.

Så er

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = R.$$

Der findes altså en invertibel matrix P ($P = E_k \ldots E_2 E_1$) så

$$PA = R$$

$P^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$.

(Theorem 2.6)
Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente

- A er invertibel.
- A har pivot i alle søjler.
- A har rang n.
- $\texttt{rref}(A) = I_n$.

(Theorem 2.6)
Hvis A og B er $n \times n$ matricer, der opfylder

$$AB = I_n$$

så er

$$BA = I_n$$

og dermed er A og B invertible, $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$.

Algoritme til beregning af invers:
Lad A være en $n \times n$ matrix. Betragt følgende $n \times 2n$ matrix

$$[A \ I_n].$$

Omskriv denne matrix til reduceret trappeform på følgende form

$$[R \ B].$$

- Hvis $R = I_n$ så er A invertibel og $A^{-1} = B$.

- Hvis $R \neq I_n$ så er A ikke invertibel.
  (Allerede når man ser at der ikke kan være pivot i de første n søjler, kan man konkludere at A ikke er invertibel.)

Begge tilfælde $P = B$ opfylder $PA = R$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{Find } A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A & I_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ligningssystemer og invers matrix:
Hvis A er en invertibel $n \times n$ matrix så kan løsningen til et ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ findes som

$$\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{b},$$

men hvis den inverse ikke er kendt er det nemmere finde løsningen med den sædvanlige metode:

$$[A\ \ \mathbf{b}] \to \ldots \to [I_n\ \ \mathbf{c}].$$

Hvis $B = [\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_p]$ er en $n \times p$ matrix så kan ligningssystemerne

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, \ldots, A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}_p$$

skrives som $AX = B$ hvor $X = [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_p]$ er en $n \times p$ matrix.
Løsningen $X = A^{-1}B$ kan beregnes på følgende måde

$$[A\ \ B] \to \ldots \to [I_n\ \ A^{-1}B].$$

EKS $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Løs ligning $AX = B$ hvor X er 2×3

$$[A\ B] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 10 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Løsning: $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 & 3 & -9 \\ -4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Inverse lineære transformationer

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.
Følgende betingelser er ækvivalente

- T har en **invers funktion**
- rank $A = n = m$
- A har en invers matrix.

Den inverse funktion T^{-1} er da den lineære transformation med standardmatrix A^{-1}.

3.1

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ad + b\cdot(-c) & a(-b) + b\cdot a \\ c\cdot d + d(-c) & c\cdot(-b) + d\cdot a \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = (ad-bc)\, I_2$$

Hvis $ad - bc = 1$ så $A^{-1} = B$

Hvis $ad - bc \neq 0$ så er

$$A \cdot \left(\frac{1}{ad-bc} B \right) = \frac{1}{ad-bc} AB = I_2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} B$$

Hvis $ad - bc = 0$ så er $AB = 0$

og hvis A invertibel $A^{-1}AB = A^{-1}0$

$$\Rightarrow B = 0$$

Altså hvis $ad - bc = 0$ så har A ikke invers.

$ad - bc$ kaldes determinanten af A

Definition

A : $n \times n$ matrix, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$

A_{ij} = matrix der fås fra A ved slette række i og søjle j.

$n = 1$: $\det A = \det [a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$ $\det A =$

$$a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} =$$

$$a_{11} \det [a_{22}] - a_{12} \det [a_{21}] =$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = ad - bc$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= 4 \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 6 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 8 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \left(0 \cdot 1 - 2 \cdot 3\right) - 6 \cdot \left(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2\right) + 8 \cdot \left(1 \cdot 3 - 0 \cdot 2\right)$$

$$= 4 \cdot (-6) - 6 (-3) + 8 \cdot 3 = -24 + 18 + 24 = 18$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -11 & 7 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

nedre triangulær:

0'er over diagonal

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - a_{14} \det A_{14}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -11 & 7 & 0 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix} - 0 + 0 - 0$$

$$= 2 \left(4 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} - 0 + 0 \right) =$$

$$2 \cdot 4 \cdot (7 \cdot 9 - 0 \cdot 6) = 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9$$

$=$ produkt af tal på diagonal.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \det I_4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Sætning 3.4

A er invertibel $\iff \det A \neq 0$

$\det A^T = \det A$

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Hvis A er invertibel : $AA^{-1} = I$

$$\Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det I$$

$$\Rightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$