Determinanter

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

Definition af determinant.

$n = 1$: $\quad \det[a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$: $\quad \det A =$

$$a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & & & \\ + & - & + & \\ & & & \end{bmatrix}$$

(i,j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant:
$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$.

$n = 2$: $\quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
og hvis $ad - bc \neq 0$ så er matricen invertibel med invers

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 3 \det\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

(i, j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Sætning 3.1+
Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}.$$

Udvikling efter søjle j:

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{2.\ \text{rakke}}{=\!=} -0 + 0 - 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 =$$

$$- \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{2.\ \text{søjle}}{=\!=} -\left(-0 + 3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 0 \right)$$

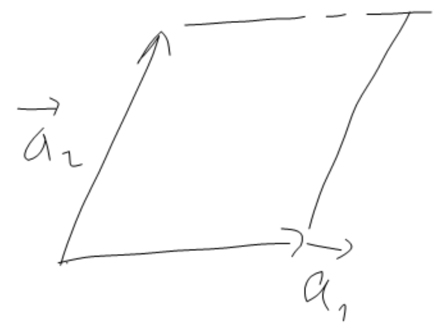
$$= -3\,(1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = 9$$

Determinanten af en **øvre triangulær** matrix er produktet af diagonalindgangene:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$

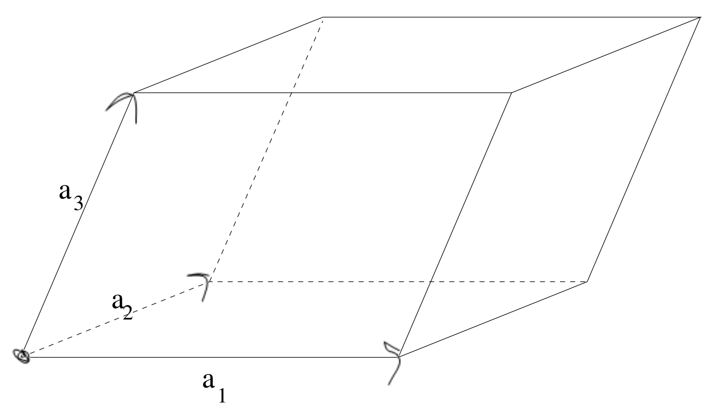
og en **nedre triangulær** matrix:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}.$$



Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$.
$|\det[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2]|$ er da arealet af et parallelogram udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Lad $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^3$.
$|\det[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]|$ er da rumfang af et parallelepipedum udspændt af $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.



Elementære rækkeoperationer på determinanter.

Matricen B fås fra A ved at udføre en af disse rækkeoperationer:

1. gang en række med et tal $k \neq 0$
   $\det(B) = k \det(A)$ altså $\det(A) = \frac{1}{k} \det(B)$.

2. række i erstattes af (række i) $+ k \cdot$ (række j), $i \neq j$
   determinanten er uændret: $\det(B) = \det(A)$.

3. ombyt to rækker.
   determinanten skifter fortegn: $\det(B) = -\det(A)$.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}{=} 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 - R_1 \to R_2}{=}$$

$$2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \longleftrightarrow R_3}{=} -2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$-2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) = 6$$

Så er $\det(5A) = \det \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 & 10 \cdot 2 & 5 \cdot 2 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 15 & 10 \end{bmatrix}$

$$5 \det \begin{bmatrix} 5\cdot 2 & 10\cdot 2 & 5\cdot 2 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 5\cdot 5\cdot \det \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5\cdot 5\cdot 5 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 5^3 \det A$$

$$= 5^3 \cdot 6 = 750$$

Egenskaber for determinanter. A og B er $n \times n$ matricer.

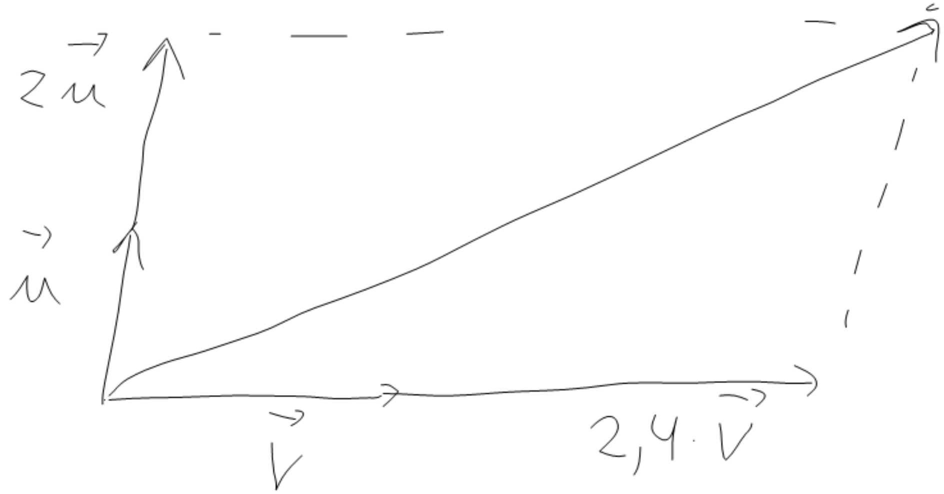
- A har en invers hvis og kun hvis $\det(A) \neq 0$.
- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

Sidstnævnte egenskab betyder at determinanter kan beregnes ved udvikling efter en søjle.

4.1

Hvis W er en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$ der opfylder

1. $\vec{0}$ ligger i W $\quad (\vec{0} \in W)$
2. Hvis $\vec{u} \in W$ og $\vec{v} \in W$ så er $\vec{u}+\vec{v} \in W$
3. Hvis $\vec{u} \in W$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\vec{u} \in W$



så siges W at være et underrum af $\mathbb{R}^n$

EKS

$\mathbb{R}^n$ er underrum af $\mathbb{R}^n$

$\{\vec{0}\}$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$

EKS

En linie eller plan i $\mathbb{R}^3$ gennem $\vec{0}$ er et underrum af $\mathbb{R}^3$.

Sætning 4.1

Lad $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$

Så er $W = \operatorname{span}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots \vec{w}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$

Bevis for 2.

Hvis $\vec{u} = a_1\vec{w}_1 + \ldots + a_k\vec{w}_k \in W$

og $\vec{v} = b_1\vec{w}_1 + \ldots + b_k\vec{w}_k \in W$

<u>Så er</u> $\vec{u}+\vec{v} = (a_1+b_1)\vec{w}_1 + \ldots + (a_k+b_k)\vec{w}_k \in W$

<u>Definition</u>

A: $m \times n$ matrix

Nul<u>rummet</u> for A er løsningsmængden til $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\text{Null } A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\}$$

EKS $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

Udvidet matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

x_3 og x_4 frie variable

$$x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \implies x_1 = x_3 - 2x_4$$

$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \implies x_2 = -2x_3 - 3x_4$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 2x_4 \\ -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Null } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Null A er et underrum af $\mathbb{R}^4$

Sætning $\quad A : m \times n$ matrix

Null A er et underrum af $\mathbb{R}^n$

Definition

$$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n] \qquad m \times n$$

Søjlerummet af A:

$$\mathrm{Col}\, A = \mathrm{span}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$$

et underrum af $\mathbb{R}^m$

<u>EKS</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$\mathrm{Col}\, A = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{da} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

et underrum af $\mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{Col}\, A = \mathbb{R}^2$$

4.2

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k\}$ er basis for V

hvis

1. span $\mathcal{B} = V$
2. $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

EKS Standardbasen for $V = \mathbb{R}^n$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$

$$e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

EKS $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ er basis for $\mathbb{R}^2$