Underrum

Definition af underrum.

En mængde V af vektorer i $\mathbb{R}^n$ siges at være et underrum af $\mathbb{R}^n$ hvis følgende tre betingelse er opfyldt:

1. $\mathbf{0} \in V$,

2. hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$,

3. hvis $\mathbf{u} \in V$ og $c \in \mathbb{R}$ så er $c\mathbf{u} \in V$.

Et underrum af $\mathbb{R}^3$ er en af følgende typer:

- $\{\mathbf{0}\}$
- En linie gennem $\mathbf{0}$.
- En plan gennem $\mathbf{0}$.
- Hele $\mathbb{R}^3$.

To vigtige typer af underrum

1.

Hvis $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$ så er Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$, og det kaldes underrummet udspændt af $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så er Span $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$, der kaldes **søjlerummet** af A og betegnes Col A.

EKS

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} s+t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} s+t \\ 2s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Col}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V er et underrum af $\mathbb{R}^3$.

Er $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ indeholdt i V ?

Er $x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$ konsistent ?

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ikke pivot i søjle 3, altså konsistent

$(x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -3)$

$\vec{w}$ ligger V

V er en plan i $\mathbb{R}^3$. Ligning ?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{række } 3}{=}$$

$$1 \cdot \det \begin{bmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - 0 + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$-2\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Løsning

$$2(x-0) - 1\cdot(y-0) - 2(z-0) = 0$$

$$2x - y - 2z = 0$$

$$V = \text{Null}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.

For en $m \times n$ matrix A defineres **nulrummet** som

$$\text{Null } A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Nulrummet af en $m \times n$ matrix er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Hvis Null $A \neq \{\mathbf{0}\}$ så giver metoden fra afsnit 1.3 løsningen udtrykt som en linearkombination af et antal vektorer, med én vektor for hver fri variabel. Disse vektorer er desuden lineært uafhængige, og udgør dermed en basis for nulrummet.

Definition af basis.
Hvis V er et underrum af $\mathbb{R}^n$ og $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en mængde af vektorer i V så siger vi at $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en basis for V hvis

- Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = V$, og
- $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Frie variable: x_2, x_5

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_5 &= 0 \\ x_3 - x_5 &= 0 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= x_2 - x_5 \\ x_3 &= x_5 \\ x_4 &= 2x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for Null A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Er $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ indeholdt i Null A ?

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ja.

$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$. Den kaldes standardbasen for $\mathbb{R}^n$.

Andre baser for $\mathbb{R}^n$:

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lad $A = [\mathbf{v}_1 \ldots \mathbf{v}_k]$.
Så er $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ lineært uafhængig hvis og kun hvis A har pivot i alle søjler,
og Span $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis A har pivot i alle rækker.

$\mathcal{S}$ er altså basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis $\texttt{rref}(A) = I_n$.

og $k = n$

Lad $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$.

- Hvis Span $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \mathbb{R}^n$ så er $k \geq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er lineært uafhængig så er $k \leq n$.
- Hvis $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er basis for $\mathbb{R}^n$ så er $k = n$.

Hvis $A = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_k]$ er en $n \times k$ matrix så udgør de søjler i A der har pivot, en basis for Col A.

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Find basis for Col A

$$\text{rref}(A) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for Col A : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Basis for underrum.

Enhver mængde $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, der udspænder V har en delmængde, der er basis for V.
Delmængden består af de søjler i matricen $[\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_k]$ der har pivot.

Enhver lineært uafhængig mængde $\mathcal{S} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ af vektorer i V kan udvides til en basis.
Gentag følgende indtil mængden udspænder V og dermed er basis for V:
Vælg en vektor $\mathbf{v} \in V$, som ikke er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p$, og tilføj $\mathbf{v}$ til mængden.

Ethvert underrum $V \neq \{\mathbf{0}\}$ har altså en basis.

Underrum knyttet til en lineær transformation

$T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ en lineær transformation med standardmatrix A, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Nulrummet af T er da det samme som nulrummet af A.

Og billedrummet (range) af T er det samme som søjlerummet af A.

4.2

Sætning 4.5.
Lad V være et underrum af $\mathbb{R}^n$.
Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$ så har V en basis (faktisk uendeligt mange).
Og alle baser for V har det samme antal vektorer.

Definition.
Dette antal kaldes dimensionen af V, skrives $\dim V$.
Desuden defineres $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

EKS

$$V = \mathbb{R}^n$$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

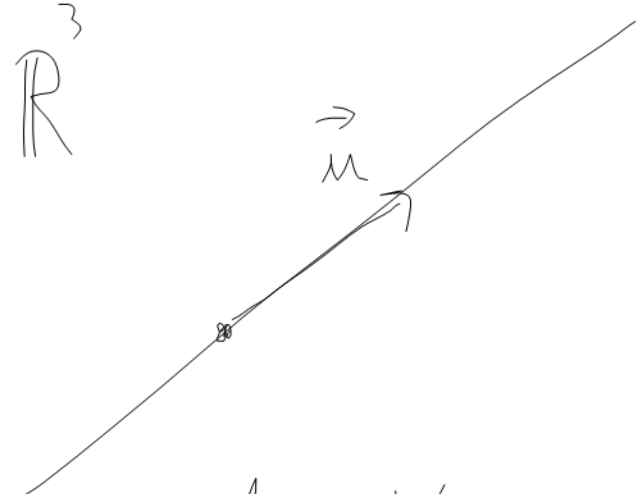
EKS Underrom af $\mathbb{R}^3$:

$\dim\{\vec{0}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

Hvis V er en linie i $\mathbb{R}^3$

$\{\vec{u}\}$ er basis for V

$\dim V = 1$



Hvis V er en plan i $\mathbb{R}^3$ så $\dim V = 2$.

Sætning 4.6+4.7

Lad V være et underrum af $\mathbb{R}^n$ med $\dim V = k$.
Og lad $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_\ell\}$ være vektorer i V.

1. Hvis S er lineært uafhængig så er $\ell \leq k$.
   Da S kan udvides til basis.
   Hvis også $\ell = k$ så er S en basis for V

2. Hvis span $S = V$ så er $\ell \geq k$.
   Da S kan udtyndes til en basis.
   Hvis også $\ell = k$ så er S en basis for V

EKS

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Frie variable: x_2, x_3, x_4

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for V: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Er $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en basis for V?

1. Vektorene i $\mathcal{B}$ ligger i V.

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rekkeoperasj.}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Pivot i alle søjler.

Altså $\mathcal{B}$ er lineært uafhængig.

3. $\mathcal{B}$ har 3 vektorer $\dim V = 3$

Ifølge 4.6 + 4.7 del 1 er $\mathcal{B}$ en basis for V.

4.3

Sætning 4.9
Hvis V og W er underrum af $\mathbb{R}^n$
og V er indeholdt i W
så er $\dim V \leq \dim W$,
og hvis $\dim V = \dim W$ så er $V = W$.

EKS

W : plan i $\mathbb{R}^3$

V : linie i W

$$1 = \dim V \leq \dim W \leq 2$$

EKS

$$V = \mathrm{Null}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$W = \mathrm{Null}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

V og W er underrum af $\mathbb{R}^4$

Hvis $\vec{u}$ ligger V så opfylder $\vec{u}$ 4 ligning

bl.a. 2 ligninger der betyder at

$\vec{u}$ ligger i W

V ligger inde i W

Altså $\dim V \leq \dim W$

<u>EKS</u> $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

lineært uafhængige vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Udvid S til en basis for $\mathbb{R}^3$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{\text{sikrer at } \operatorname{Col} A = \mathbb{R}^3} \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow[]{\substack{R_2 - R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot i søjle 1, 2, 4

Basis for Col $A = \mathbb{R}^3$: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

4.3 A: $m \times n$ matrix

dim Col A = antal søjler med pivot

= rank A.

nullity A = n - rank A

= antal søjler uden pivot

= antal frie variable i $A\vec{x} = \vec{0}$

= dim Null A