Dimension af underrum

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.
Hvis $V \neq \{\mathbf{0}\}$ så har V uendeligt mange baser.

Alle baser for V har det samme antal vektorer.

Antallet af vektorer i en basis for V kaldes **dimensionen** af V, skrives $\dim V$.

Vi definerer desuden $\dim\{\mathbf{0}\} = 0$.

V: underrum af $\mathbb{R}^n$.

Antag $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en lineært uafhængig mængde af vektorer i V.
Så er $k \leq \dim V$.
Hvis $k = \dim V$ så er $\mathcal{S}_1$ en basis for V.

Antag $\mathcal{S}_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ er en mængde af vektorer i V, der udspænder V.
Så er $p \geq \dim V$.
Hvis $p = \dim V$ så er $\mathcal{S}_2$ en basis for V.

EKS

$$V = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\} \quad \text{underrum af } \mathbb{R}^3$$

Udspændt af 2 vektorer, $\dim V \leq 2$

$$\vec{u} = -2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\3\end{bmatrix} \qquad \text{ligger i } V$$

Er $\vec{u}, \vec{v}$ lineært uafhængige ?

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivot i begge søjler: lineært uafhængige

Derfor $\dim V \geq 2$

$$\dim V = 2$$

$\{\vec{u}, \vec{v}\}$ er basis da

1. vektorerne ligger i V
2. vektorerne er lineært uafhængige
3. der er $\dim V$ vektorer.

EKS

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 6s+9t \\ 5s \\ 4t \end{bmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 6s+9t \\ 5s \\ 4t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$V = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ er en basis for V, da lineært uafhængige.

$$\dim V = 2$$

Underrum knyttet til en matrix

A: en $m \times n$ matrix.

Fra tidligere:
rank $A =$ antal søjler i A med pivot
nullity $A = n -$ rank $A =$ antal søjler uden pivot $=$ antal frie variable i ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Søjler med pivot udgør en basis for søjlerummet, Col A.
Altså $\dim \mathrm{Col}\ A =$ rank A.

En basis for nulrummet af A bestemmes som i afsnit 1.3, med en basisvektor for hver fri variabel.
Altså $\dim \mathrm{Null}\ A =$ nullity A.

$$\dim \mathrm{Null}\ A + \dim \mathrm{Col}\ A = n. \quad = \text{antal søjler i } A$$

Hvis $\texttt{rref}(A) = R$, så er Row $A =$ Row R.
Rækker i R med pivot (altså alle rækker forskellig fra 0) udgør en basis for Row A.

Derfor er $\dim \text{Row } A = \text{rank } A$.

Desuden er $\dim \text{Row } A = \text{rank } A^T$, da Row $A =$ Col A^T.

Altså $\text{rank } A = \text{rank } A^T$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{rref}(A) = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & \underline{1} & -1 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{rank} A = 2$

$\dim \operatorname{Col} A = 2$

$\dim \operatorname{Row} A = 2$

$\dim \operatorname{Null} A = 5 - 2 = 3$

$\dim \operatorname{Null} A^T =$ antal söjler i A^T $- \operatorname{rank} A^T$

$= 3 - 2 = 1$

Basis for Col A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vigtigt: søjler fra A

Basis for Row A

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -10 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$$

Vigtigt: rækker fra rref(A)

4.4

EKS Koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ er basis for $\mathbb{R}^2$

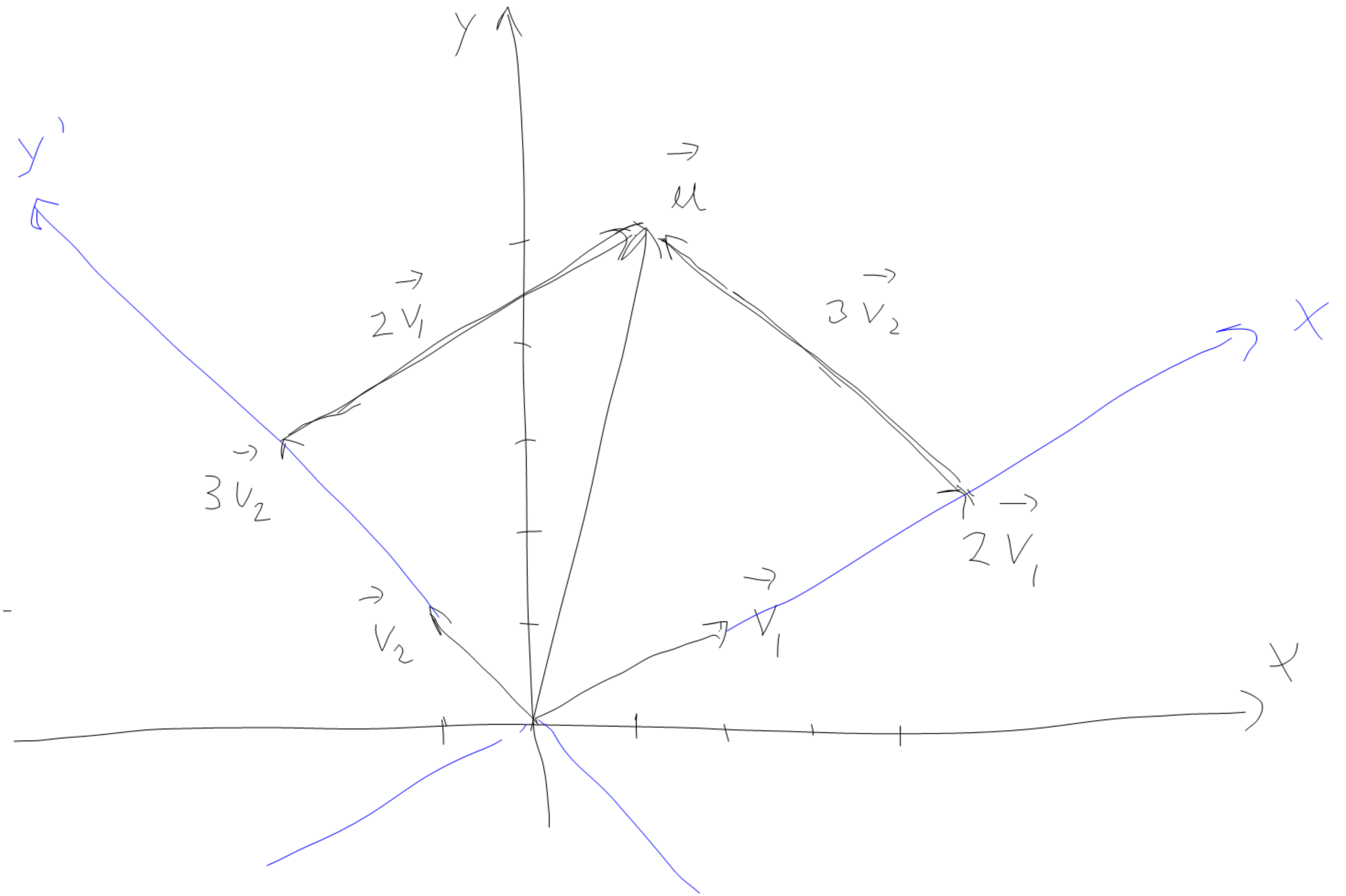
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektor i $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Skriv: $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{u}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 3$

Alltså $\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$



Nyt koordinatsystem: x'-akse, y'-akse

$\vec{u}$ har koordinater $x' = 2$, $y' = 3$.

<u>Sætning 4.10</u>

V: underrum af $\mathbb{R}^n$

$B = \{ \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k \}$ basis for V.

Hvis $\vec{v} \in V$ så kan $\vec{v}$ skrives entydigt

$$\vec{v} = a_1 \vec{b}_1 + \ldots + a_k \vec{b}_k$$

<u>Bevis</u> $\vec{v} \in V = \text{span}\{ \vec{b}_1 \ldots \vec{b}_k \}$

altså $\vec{v} = a_1 \vec{b}_1 + \dots + a_k \vec{b}_k$ (1)

Hvis også

$$\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_k \vec{b}_k \qquad (2)$$

Så av ((1) − (2)):

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (a_1 - c_1)\vec{b}_1 + \dots + (a_k - c_k)\vec{b}_k$$

altså $a_1 - c_1 = 0 \quad \dots \quad a_k - c_k = 0$

$$a_1 = c_1 \quad \dots \quad a_k = c_k$$

$$V = \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{B} = \{ \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n \}$$ basis for $\mathbb{R}^n$

Hvis $\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n$

Så er $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ koordinatvektoren for $\vec{v}$ m.h.t. $\mathcal{B}$.

<u>EKS</u>

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ basis for $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hvis $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ så er $\vec{v} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

<u>EKS</u>

Standardbasis for $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1 \ \ldots \ \vec{e}_n\}$$

Hvis $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n$

si lr $\left[\vec{v}\right]_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \vec{v}$

Teori

$$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$$

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \ldots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

$\mathcal{B}$ er basis hvis og kun hvis $\mathrm{rref}(B) = I_n$

altså hvis B har en invers B^{-1}

Antag $\mathcal{B}$ er basis.

Hvis $$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

så er $\vec{v} = c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n$

$$= \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \dots & \vec{b}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = B \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Altså (Sætning 4.11):

$$\vec{v} = B \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$B^{-1} \vec{v} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$