Koordinatsystemer

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$ så findes der for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ entydige tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$ så

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_k\mathbf{b}_k.$$

$\mathcal{B}$ udspænder V. Det betyder at $\mathbf{v}$ på mindst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig. Det betyder at $\mathbf{v}$ på højst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

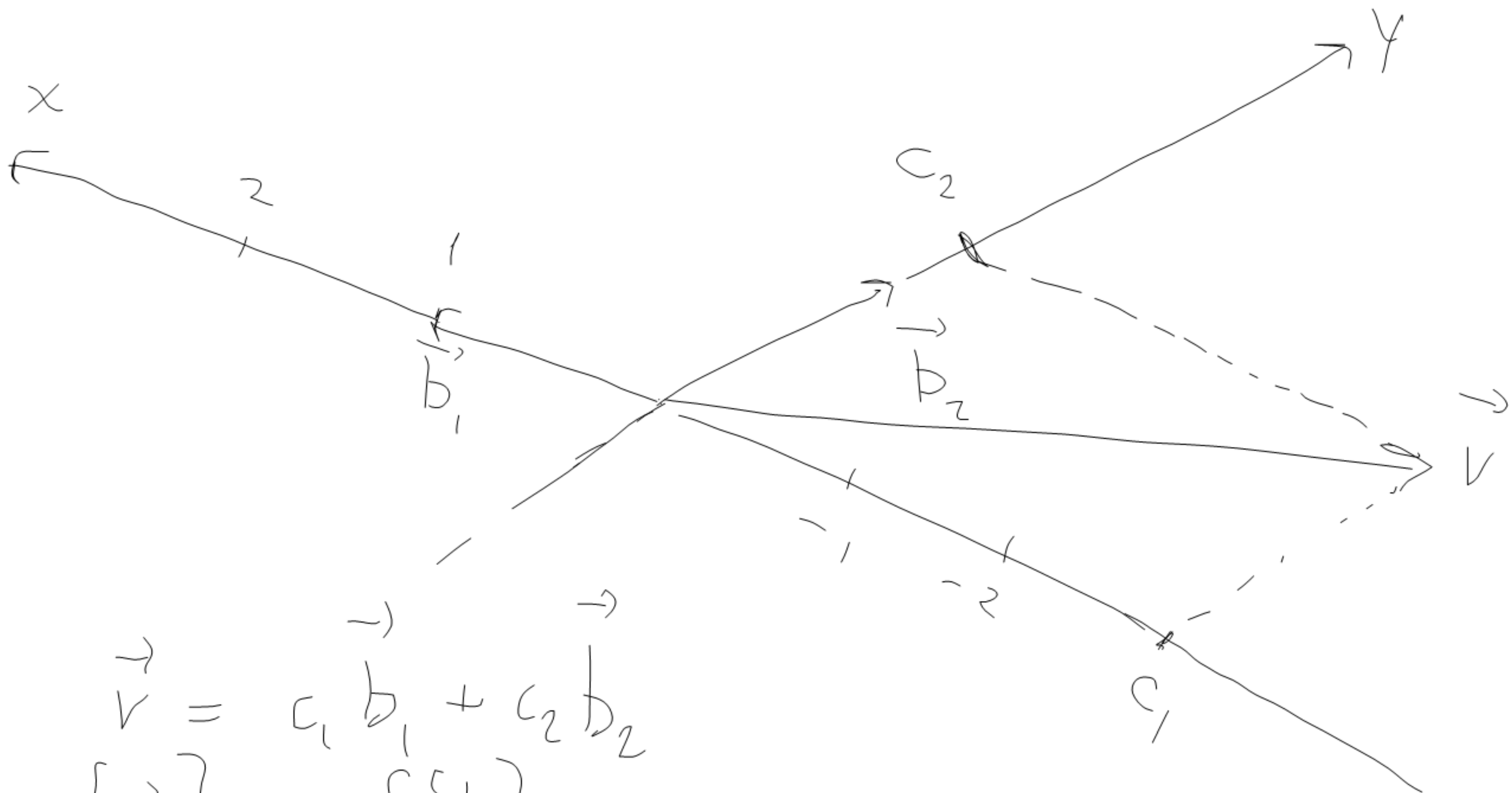
Koordinatvektor. (defineres kun for $V = \mathbb{R}^n$.)

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$
(hvor rækkefølgen af basisvektorerne er fastlagt)
så defineres koordinatvektoren for $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_n\mathbf{b}_n$.

$\mathbb{R}^2$, Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} = \mathcal{B}$



$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

EKS

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\vec{v} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\vec{v} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$, hvor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$ og $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \dots\ \mathbf{b}_n]$ som er en $n \times n$ matrix.

Så er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis B er invertibel.

Hvis $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ så kan koordinatvektorer m.h.t. $\mathcal{B}$ bestemmes ved

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}.$$

Omvendt: hvis koordinatvektoren $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ er kendt, så kan $\mathbf{v}$ bestemmes ved

$$\mathbf{v} = B[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

EKS

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & I_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\mathcal{B}$ er altså basis for $\mathbb{R}^3$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\left[\vec{v}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

så er

$$\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$B v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

så er

$$\left[\vec{u}\right]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hvis $\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

så er $[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}\vec{w} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c \\ a-b \\ a+c \end{bmatrix}$$

4.5

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear transformation.

Hvis $m = n$ så kaldes T en linear operator på $\mathbb{R}^n$

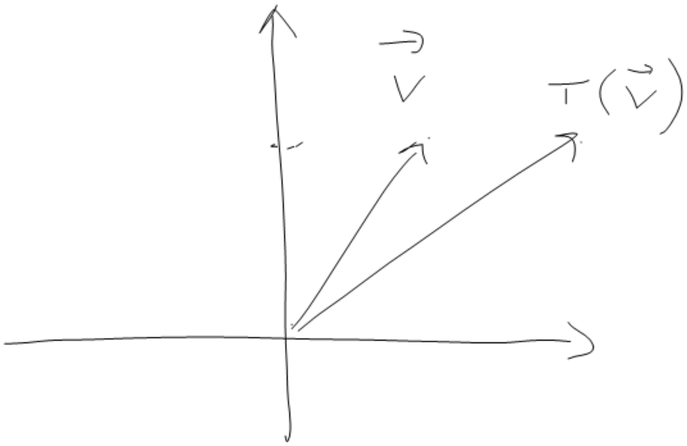
EKS

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Standard matrix $A = \begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$T(\vec{v}) = A\vec{v}$

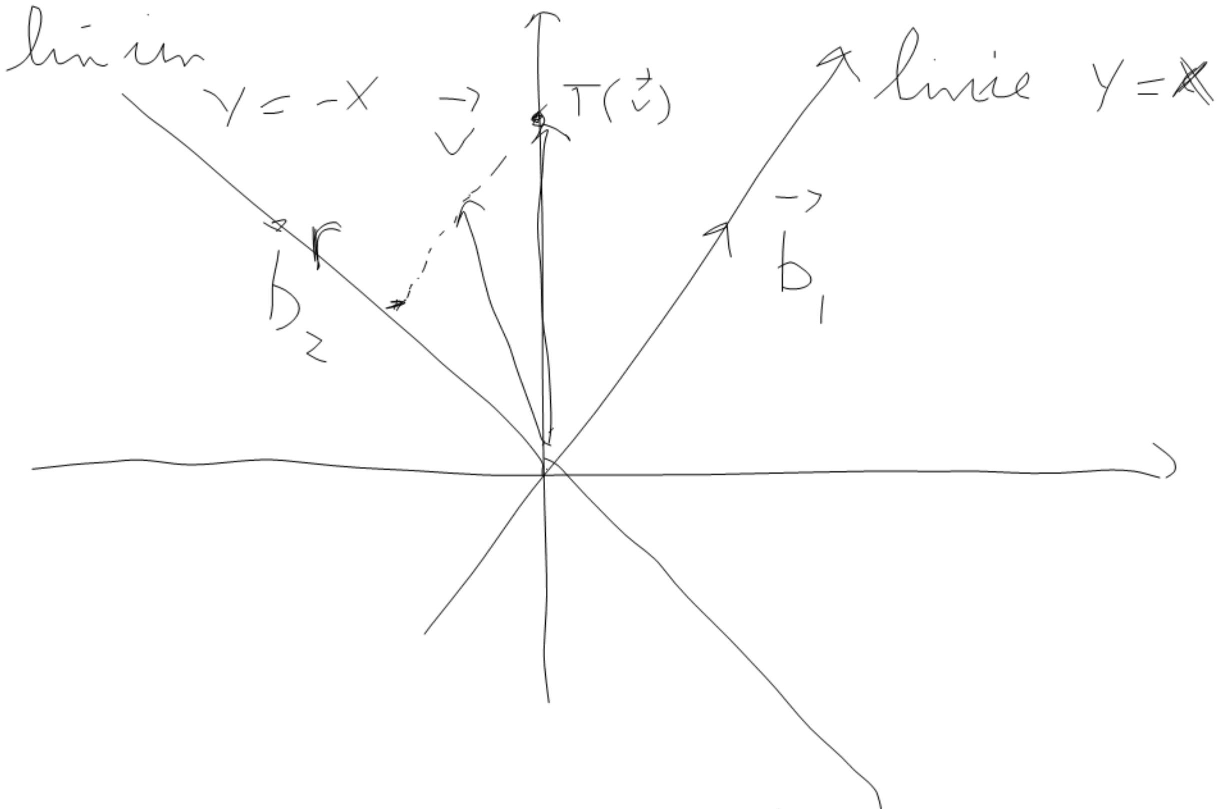


T fordobler afstand til y-aksen (vinkelret)

EKS 2

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineær

T fordobler afstanden (vinkelret) til linien $y = -x$



Ny basis

$$\mathcal{B} = \{ \vec{b}_1 , \vec{b}_2 \}$$

$$\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1$$

$$T(\vec{b}_2) = \vec{b}_2$$

$$\vec{v} = x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2 , \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = T(x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2) =$$

$$xT(\vec{b}_1) + yT(\vec{b}_2) = 2x\vec{b}_1 + y\vec{b}_2$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{bmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} & [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2b_1]_{\mathcal{B}} & [\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definition

T : linear operator på $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B} = \{ \vec{b}_1 \ldots \vec{b}_n \}$ basis for $\mathbb{R}^n$

Matrix representation af T m.h.t. basen $\mathcal{B}$ er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ \ldots \ [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right]$$

EKS

$$\mathcal{E} = \{ \vec{e}_1 \; \dots \; \vec{e}_n \}$$

T linear operator på $\mathbb{R}^n$

$$[T]_{\mathcal{E}} = \left[[T(\vec{e}_1)]_{\mathcal{E}} \; \dots \; [T(e_n)]_{\mathcal{E}} \right]$$

$$\left[T(\vec{e}_1) \; \dots \; T(\vec{e}_n) \right] =$$

Standard matrix for T.

EKS 2

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b_2} \right\}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \; [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvad er standardmatricen for T?

Sætning 4.12

A : standardmatrix for lineær operator T

$\mathcal{B} = \{\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n\}$ $\quad B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$

Så er

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B$$

$$A = B [T]_{\mathcal{B}} B^{-1}$$

Bevis

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\left[[A\vec{b}_1]_\beta \; \cdots \; [A\vec{b}_n]_\beta \right] =$$

$$\left[B^{-1}A\vec{b}_1 \; \cdots \; B^{-1}A\vec{b}_n \right] =$$

$$B^{-1}A\left[\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n \right] = B^{-1}AB$$

EKS 2

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hvad er standardmatricen A for T?

$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$