Matrix repræsentation af lineær operator

En lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ kaldes en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ så defineres matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[T]_{\mathcal{B}} = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}}\ [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}}\ \ldots\ [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}}].$$

$[T]_{\mathcal{B}}$ er den entydige $n \times n$ matrix, der opfylder

$$[T(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

for enhver vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

EKS

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$ lineær operator på $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$ basis, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$[B \; I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{ref}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}} = B^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 19 \end{bmatrix}$$

$$\left[T\left(\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\begin{bmatrix}13\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-37\\29\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-24 & -37\\19 & 29\end{bmatrix}$$

Alternativ metode:

Standardmatrix $A = \begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB = \begin{bmatrix}-24 & -37\\19 & 29\end{bmatrix}$$

Matrix repræsentationen af T m.h.t. standardbasen $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ er standardmatricen for T:

$$A = [T]_{\mathcal{E}} = [T(\mathbf{e}_1)\ T(\mathbf{e}_2)\ \ldots\ T(\mathbf{e}_n)].$$

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og lad $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_n]$.

Lad A være standardmatricen for en lineær operator T på $\mathbb{R}^n$. Så bestemmes matrix repræsentationen af T m.h.t. $\mathcal{B}$ ved

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1}AB,$$

og standardmatricen kan bestemmes ved

$$A = B[T]_{\mathcal{B}}B^{-1}.$$

EKS Samme basis som før

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

S: lineær operator på $\mathbb{R}^2$ med

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så er standardmatrisen for S:

$$A = B\,[S]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & -8 \\ 18 & -11 \end{bmatrix}$$

Hvis A og C er $n \times n$ matricer, der opfylder at der findes en invertibel $n \times n$ matrix P så $C = P^{-1}AP$ så siger vi at A og C er **similære**.

Hvis A og C er similære så er C og A også similære
for hvis $C = P^{-1}AP$ så er $A = PCP^{-1} = (P^{-1})^{-1}C(P^{-1})$

Desuden: Hvis A og C er similære og C og B er similære, så er A og B similære.

At A og C er similære betyder at de er forskellige matrix repræsentationer af samme lineære operator.

5.1

Egenvektorer og egenværdier

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

T er en linear operator på $\mathbb{R}^3$ med standardmatrix A $\quad T(\vec{v}) = A\vec{v}$

Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{u}) = A\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\vec{u}$$

$\vec{u}$ er egenvektor med egenværdi 2.

$$T(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\vec{v}$$

$\vec{v}$ er egenvektor med egenværdi -3

$$T(\vec{w}) = A\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\vec{w}$$

$\vec{w}$ er egenvektor med egenverdi 4.

$$T(\vec{u}) = 2\vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$$

$$[T(\vec{u})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = 0 \cdot \vec{u} - 3\vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$$

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{w}) = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 4 \cdot \vec{w}$$

$$[T(\vec{w})]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lad T være en lineær operator på $\mathbb{R}^n$.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for T hvis der findes et tal λ så

$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for T hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

En egenvektor for en lineær operator er en egenvektor for dens standardmatrix.

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

A: $n \times n$ matrix

Antag at en egenværdi λ er kendt.
Find tilhørende egenvektor:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$A\vec{x} - \lambda I_n\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Updownarrow$$

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0} \quad , \quad \text{et}$$

homogent lineært lignings system.

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Er $\lambda = 5$ en egenværdi?

Find egenvektor

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En egenvektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ er en løsning, $\vec{x} \neq \vec{0}$.

$$x_1 - 2x_2 = 0 \iff x_1 = 2x_2$$

x_2 fri variabel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (x_2 \neq 0)$$

5 er egenværdi med egenvektor f. eks. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Definition

A : $n \times n$

Egenrummet for A hørende til egenværdi λ er løsningsmængden til $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (inkl. $\vec{0}$)

Altså $\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$ underrum af $\mathbb{R}^n$.

EKS $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Egenrummet hørende til

$\lambda = 5$: $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

5.2 Find en egenværdi λ

Fra tidligere:

Hvis $\det B \neq 0$ så er B invertibel

og $B\vec{x} = \vec{0}$ har eneste løsning

$\vec{x} = B^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

Hvis $\det B = 0$ så har B ikke
pivot i alle søjler
og $B\vec{x} = \vec{0}$ har frie variable
og en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$

Anvend på $B = A - \lambda I_n$

Hvis $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$
så er eneste løsning til $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$
$\vec{x} = \vec{0}$. λ er altså ikke egenværdi.

Hvis $\det(A - \lambda I_n) = 0$

så har $(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}$ en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$

altså en egenvektor.

λ er egenverdi

Egenverdiene for A er løsningene til

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Karakteristisk ligning:

$$\det(A - tI_n) = 0$$

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Find egenværdierne:

$$\det(A - tI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}\right) =$$

$$\det \begin{bmatrix} 5-t & -6 \\ 3 & -4-t \end{bmatrix} = (5-t)\cdot(-4-t) - (-6)\cdot 3 =$$

$$-20-5t+4t+t^2+18 = t^2-t-2$$

Karakteristisk ligning $t^2-t-2=0$

$$\begin{cases} at^2+bt+c=0 \qquad D=b^2-4ac \\ t=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \end{cases}$$

$$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9$$

$$t=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$

$$t^2-t-2 = (t-2)\big(t-(-1)\big)=(t-2)(t+1)$$

Egenverdiene for A: 2 og -1.