Egenvektorer og egenværdier

Lad A være $n \times n$ matrix.
En vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ siges at være en egenvektor for A hvis der findes et tal λ (lambda) så

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

λ siges at være en egenværdi for A hørende til egenvektoren $\mathbf{v}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\vec{v}$: egenvektor

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} -2+8 \\ 8+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\vec{v}$$

$\lambda = 3$ egenværdi

Lad λ være en egenværdi for en $n \times n$ matrix A.
Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er mængden af vektorer $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, der opfylder

$$\underline{A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.}$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien λ er altså nulrummet af $\underline{A - \lambda I_n}$.

Egenrummet hørende til egenværdien λ består af alle egenvektorer hørende til egenværdien λ. Og $\mathbf{0}$.

Egenrummet er et underrum af $\mathbb{R}^n$.

<u>EKS</u> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Er $\lambda = 2$ en egenværdi?

Hvis Ja: find en basis for egenrum.

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A - 2I_3)\vec{x} = \vec{0}$ har en løsning $\vec{x} \neq \vec{0}$

$\lambda = 2$ er altså en egenværdi.

x_2, x_3 frie variable $\quad x_1 + 2x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis for egenrum hørende til egenværdi

$\lambda = 2$:
$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Karakteristisk ligning/polynomium.

Lad A være en $n \times n$ matrix.
Så er $\lambda \in \mathbb{R}$ en egenværdi for A hvis og kun hvis

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Denne ligning kaldes den karakteristiske ligning for A.

$\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n.
Det kaldes det karakteristiske polynomium for A.

Rødder i polynomier.

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et polynomium af grad 2. Diskriminanten er $D = b^2 - 4ac$.

Hvis $D > 0$ så har $f(x)$ rødder (nulpunkter) $r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ og $r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$. Desuden er $f(x) = \underline{a(x - r_1)(x - r_2)}$.

Hvis $D = 0$ så har $f(x)$ dobbeltrod $r = \frac{-b}{2a}$ og $f(x) = a(x - r)^2$.

Hvis $D < 0$ så har $f(x)$ ingen reelle rødder.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Karakteristisk polynomium:

$$\det(A - t I_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & 3 \\ 1 & 4-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(4-t) - 3 \cdot 1 = 8 - 2t - 4t + t^2 - 3 =$$

$$t^2 - 6t + 5$$

Karakteristisk ligning:

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \qquad D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 =$$

$$t = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases} \qquad 16 = 4^2$$

Egenverdier: 5 og 1.

Egenrom, $\lambda = 5$

$$A - 5I_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri, $x_1 - x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

<u>EKS</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)(1-t) - (-1)\cdot 1 = 2 - 2t - t + t^2 + 1 =$$

$$t^3 - 3t + 3$$

$$D = (-3)^2 - 4\cdot 3 = -3 < 0$$

Ingen egenverdier.

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et polynomium af grad n.

Et tal r siges at være rod i $f(x)$ hvis $f(r) = 0$.

Hvis $f(x)$ har forskellige (reelle) rødder $r_1, r_2, \ldots, r_k$ så kan $f(x)$ skrives som

$$f(x) = (x - r_1)^{m_1} (x - r_2)^{m_2} \cdots (x - r_k)^{m_k} \underline{g(x)},$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har reelle rødder (f.eks. $g(x) = a_n$).

m_i kaldes multipliciteten af λ_i.

Multiplicitet af egenværdi.

Lad λ være en egenværdi for matricen A.

Multipliciteten af egenværdien λ defineres da som multipliciteten af λ som rod i det karakteristiske polynomium $\det(A - tI_n)$.

Dimensionen af egenrummet Null $(A - \lambda I_n)$ opfylder

$$1 \leq \dim \text{Null } (A - \lambda I_n) \leq \text{multipliciteten af } \lambda.$$

EKS $\quad A : 8 \times 8$ matrix

$$\det(A - tI_8) = (t-5)^3 (t+3)^2 (t-2)(t^2+1)$$

$t+3 = t-(-3)$

Egenværdi	multiplicitet	dim af egenrum
5	3	1, 2 eller 3
−3	2	1 eller 2
2	1	1

$t^2+1=0$ har ingen løsning

Egenværdier af similære matricer.

Lad A og B være similære $n \times n$ matricer, $B = P^{-1}AP$. Så er

$$\det(A - tI_n) = \det(B - tI_n).$$

Da matricerne har samme karakteristiske polynomium, har de de samme egenværdier med de samme multipliciteter.

Desuden har egenrummet for A hørende til egenværdien λ
samme dimension som
egenrummet for B hørende til egenværdien λ.

A : $n \times n$

$A \xrightarrow{-R_i \to R_i} B \qquad \det A = -\det B$

$\det(-A) = (-1)^n \det A$

$\det(tI_n - A) = (-1)^n \det(A - tI_n)$

karakteristisk polynomium i MATLAB

5.3

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ -3x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

Find egenværdier og egenvektorer for T.

Standardmatrix

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t+1)(t-2)^2$$

Egenværdier: -1 med multiplicitet 1

2 — 〃 — 2

Egenrum, $\lambda = -1$

$$A - (-1) I_3 = A + I_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 fri variabel $\quad x_1 = x_3, \quad x_2 = x_3$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Egenrum, $\lambda = 2$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_3 er frie variable

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis: $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{basis for } \mathbb{R}^3$$

$$= \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \}$$

$$T(\vec{b}_1) = A\vec{b}_1 = -\vec{b}_1 = -\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + 0\vec{b}_3$$

$$[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_2) = 2\vec{b}_2 \qquad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{b}_3) = 2\vec{b}_3 \qquad [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matrix representation of T m.h.t. $\mathcal{B}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

Afsnit 4.5:

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B$$

hvor $B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \vec{b}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = B[T]_{\mathcal{B}} B^{-1} = B D B^{-1}$$

<u>Definition</u>

A: $n \times n$ matrix

A er diagonaliserbar hvis der findes en diagonal matrix D og en invertibel matrix P så

$$A = P D P^{-1}$$

Anvendelse

A: $n \times n$ matrix

Udregn A^{100}

Find diagonalisering (hvis muligt):

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDP^{-1}$$
$$= PD^2P^{-1}$$

$$A^{100} = PD^{100}P^{-1}$$

Hviś $D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ så er $D^{100} = \begin{bmatrix} a^{100} & 0 \\ 0 & b^{100} \end{bmatrix}$