Diagonalisering af matricer

Lad A være en $n \times n$ matrix.
A siges at være diagonaliserbar hvis der findes en invertibel matrix P og en diagonalmatrix D så

$$A = PDP^{-1}.$$

A er diagonaliserbar hvis og kun hvis der findes en basis for $\mathbb{R}^n$, der består af egenvektorer for A.

Hvis $\mathbb{R}^n$ har en basis $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ af egenvektorer, hvor $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$
så kan P vælges som

$$P = [\mathbf{p}_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{p}_n]$$

og D er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.

Det er vigtigt at rækkefølgen af søjler i P svarer til rækkefølgen af egenværdier på diagonalen af D.

EKS

Diagonaliser

$$A = \begin{bmatrix} -26 & -36 \\ 18 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} -26-t & -36 \\ 18 & 25-t \end{bmatrix} =$$

$$(-26-t)(25-t) - (-36)\cdot 18 = t^2 + t - 2$$

$$t^2 + t - 2 = 0 \qquad D = 1^2 - 4\cdot(-2) = 9 = 3^2$$

$$t = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Eigenspaces

$\lambda = 1$

$$A - I_2 = \begin{bmatrix} -27 & -36 \\ 18 & 24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 free

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Basis for eigenspace: $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda = -2$

$$A - (-2) I_2 = \begin{bmatrix} -24 & -36 \\ 18 & 27 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} x_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Basis: $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Sæt $P = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

Diagonaliseringsalgoritme.
A: en $n \times n$ matrix.

Bestem det karakteristiske polynomium for A, og skriv

$$\det(A - xI_n) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \cdots (x - \lambda_k)^{m_k} g(x),$$

hvor $g(x)$ er et polynomium, der ikke har nogen (reelle) rødder.

Hvis graden af $g(x)$ er mindst 2 og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k < n$ så er A ikke diagonaliserbar.

Hvis $g(x) = \pm 1$ og dermed $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$:
For hver egenværdi λ_i:
find en basis for egenrummet Null $(A - \lambda_i I)$.

Hvis for en af disse egenværdier $\dim \text{Null}\,(A - \lambda_i I) < m_i$ så er A ikke diagonaliserbar.

Ellers:

sæt alle baser for egenrum sammen i en mængde $\{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, som er basis for $\mathbb{R}^n$.
Lad $P = [\mathbf{p}_1 \ \ldots \ \mathbf{p}_n]$ og lad

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

være den diagonalmatrix der har egenværdierne for A på diagonalen, sådan at $A\mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Så er

$$A = PDP^{-1}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-2)(t^2+4)$$

$t^2 + 4 = 0$ har ingen løsning

A er ikke diagonaliserbar.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-2)(t-1)^2$$

Egenværdier: 2 med multiplicitet 1

1 — // — 2

Egenrum

$\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fri variable x_2, x_3

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$

Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A^m = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{bmatrix} P^{-1}$$

Anvendelse af diagonalisering.

Hvis $A = PDP^{-1}$ hvor D er diagonalmatricen

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så er

$$A^m = P \begin{bmatrix} \lambda_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^m \end{bmatrix} P^{-1},$$

for ethvert positivt helt tal m.

7.1

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n =$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \vec{u}^T \vec{v}$$

$$A\vec{u} \cdot \vec{v} = (A\vec{u})^T \vec{v} = (\vec{u}^T A^T) \vec{v}$$

$$\vec{u}^T (A^T \vec{v}) = \vec{u} \cdot A^T \vec{v}$$

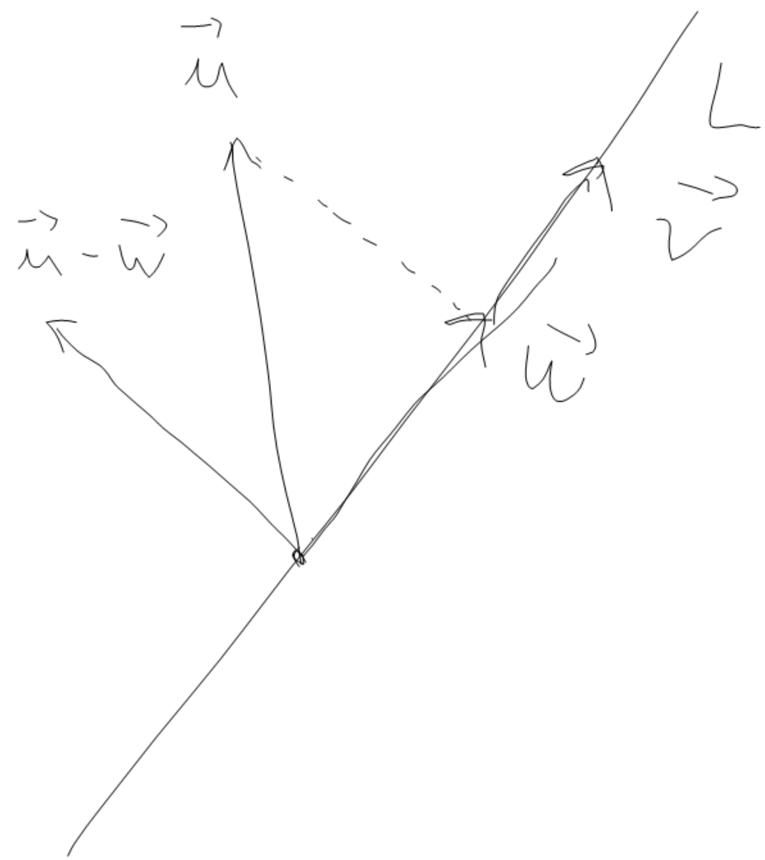
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$$

Ortogonal projektion

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\quad L = \mathrm{Span}\{\vec{v}\}$ linie

$\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{w}$: ortogonal af $\vec{u}$ på L



$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\,\vec{v}$$

$\vec{u}-\vec{w}$ er ortogonal på $\vec{v}$

altså $(\vec{u}-\vec{w})\cdot\vec{v} = 0$

7.2

$S = \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

S er <u>ortogonal</u> hvis $v_i \cdot v_j = 0$ når $i \neq j$

S er <u>ortonormal</u> hvis S er ortogonal og $\|\vec{v}_i\| = 1$ for alle i.

EKS

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 1 + 0 - 1 = 0$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ er ortogonal.

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{6}, \quad \|\vec{v}_3\| = \sqrt{2}$$

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{v}_1, \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}_2, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_3 \right\}$ er ortonormal.

Sætning

Hvis $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k$ er ortogonal og $\neq \vec{0}$

Så er vektorene lineært uavhengige.

Hvis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ er ortogonal basis for underrom V.

og $\vec{u} \in V$

så er $\vec{u} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k$ hvor

$$c_i = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_i}{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$$

Hvis B er ortonormal basis (ONB)

så er $c_i = \vec{u} \cdot \vec{v}_i$

Feks $\vec{v}_1 \cdot \vec{u} = c_1 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 + \underbrace{c_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + \ldots}_{=0}$

EKS

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ONB for $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = 7$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_3 = 3$$

$$\vec{u} = 5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$

Gram-Schmidt:

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ basis for subspace V.

Find orthogonal basis for V:

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_4 = \ldots$$