Ortogonale og ortonormale mængder.

Lad $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ være en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{S}$ siges at være ortogonal hvis vektorerne i $\mathcal{S}$ er parvis ortogonale.

$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$

$\mathcal{S}$ siges at være ortonormal hvis $\mathcal{S}$ er ortogonal og vektorerne i $\mathcal{S}$ alle har norm 1.

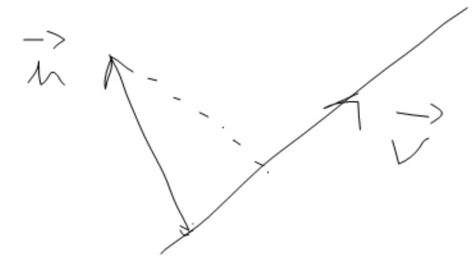
længde

$\|\vec{v}_i\|^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = 1$

Enhver ortogonal mængde $\mathcal{S}$ af vektorer forskellig fra $\mathbf{0}$ er lineært uafhængig.

Ortogonal projektionen af $\mathbf{u}$ på linien Span$\{\mathbf{v}\}$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ beregnes som

$$\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||^2}\mathbf{v}.$$



Hvis $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ er en **ortogonal basis** for et underrum W af $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{u} \in W$ så er

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k,$$

hvor

$$c_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{||\mathbf{v}_i||^2}.$$

Hvis $\mathcal{S}$ er orto*normal* så er

$||\vec{v}_i|| = 1$

$$c_i = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i.$$

EKS $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-6) = 0$$

$\{ \vec{v}_1 , \vec{v}_2 \}$ er ortogonal

$$\| \vec{v}_1 \| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\| \vec{v}_2 \| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

$\vec{w}_1 = \frac{1}{5} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix}$, $\| \vec{w}_1 \| = \sqrt{0,6^2 + 0,8^2} = 1$

$\vec{w}_2 = \frac{1}{10} \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,8 \\ -0,6 \end{bmatrix}$

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ er ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{w}_1)\,\vec{w}_1 + (\vec{u} \cdot \vec{w}_2)\,\vec{w}_2 =$$

$$(3+4)\,\vec{w}_1 + (4-3)\,\vec{w}_2 = 7\vec{w}_1 + 1 \cdot \vec{w}_2$$

Gram-Schmidt ortogonalisering.

Lad $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ være en basis for et underrum W af $\mathbb{R}^n$.
Så har W en ortogonal basis $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ der kan bestemmes ved Gram-Schmidt ortogonalisering:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2$$

$$\ldots$$

En ortonormal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ kan derefter bestemmes ved normalisering af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, altså ved at beregne $\mathbf{w}_i = \frac{1}{||\mathbf{v}_i||}\mathbf{v}_i$, for $i = 1, \ldots, k$.

EKS

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{v}_1\|^2 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \|\vec{v}_2\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}-3\\0\\-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$\left\{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ \vec{v}_3\right\}$ er ortogonal

$$\|\vec{v}_1\|=\|\vec{v}_2\|=\|\vec{v}_3\|=\sqrt{9}=3$$

$$\vec{w}_1=\frac{1}{3}\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1/3\\2/3\\2/3\end{bmatrix},\quad \vec{w}_2=\frac{1}{3}\vec{v}_2=\begin{bmatrix}2/3\\1/3\\-2/3\end{bmatrix},\quad \vec{w}_3=\frac{1}{3}\vec{v}_3$$

$\left\{\vec{w}_1,\ \vec{w}_2,\ \vec{w}_3\right\}$ er ortonormal

QR-faktorisering.

$A = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k]$: en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler (og dermed $n \geq k$).

Så findes $n \times k$ matrix $Q = [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k]$ hvor $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ er en ortonormal mængde,
og en $k \times k$ øvre triangulær matrix R
sådan at $A = QR$.
Dette kaldes QR-faktorisering af A.

$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ bestemmes fra $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ ved Gram-Schmidt ortogonalisering og normalisering.
R bestemmes ved $r_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{w}_i$.

EKS, fortsat

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 3$$

$$r_{21} = \vec{u}_1 \cdot \vec{w}_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

$$r_{12} = \vec{u}_2 \cdot \vec{w}_1 = \frac{4}{3} + \frac{10}{3} + \frac{4}{3} = 6$$

$$r_{22} = \vec{u}_2 \cdot \vec{w}_2 = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} + \frac{-4}{3} = 3$$

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Så är $A = QR$

Lad $A = QR$ være en QR-faktorisering af en $n \times k$ matrix med lineært uafhængige søjler.

Vi betragter ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
Da A har pivot i alle søjler er der *højst* én løsning.

Da $Q^T Q = I_k$ har vi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; Q^T QR\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}.$$

Da R er en øvre triangulær matrix med tal $\neq 0$ på diagonalen så er det sidste ligningssystem konsistent og det er let at løse.

Men $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \not\Leftarrow R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$.

For at løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ved hjælp af QR-faktorisering) skal vi løse $R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$ og derefter indsætte løsningen i $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hvis dette ikke er en løsning så er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ inkonsistent.

EKS. fortsatt

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Løs $A\vec{x} = \vec{b}$

$$Q^T \vec{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$R\vec{x} = Q^T \vec{b}:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$$

$$3x_2 = -6 \iff x_2 = -2$$

$3x_1 + 6 \cdot (-2) = 3 \iff x_1 = 5$

Indsæt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $A\vec{x} = \vec{b}$ OK

$\vec{c} = \begin{bmatrix} -3,2 \\ 0,2 \\ 5,9 \end{bmatrix}$ Løse $A\vec{x} = \vec{c}$

$Q^T \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

$R\vec{x} = Q^T \vec{c}$ har også løsning

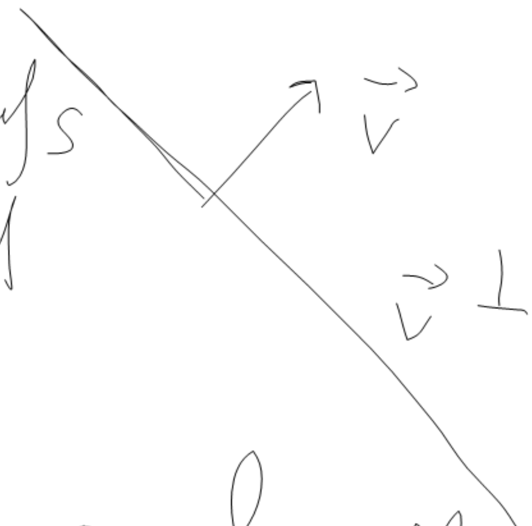
$\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ men $A\vec{x} \neq \vec{c}$

Afsnit 3

S : mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$

$S^{\perp}$ det ortogonale komplement af S

består af vektorer vinkelret på vektorer i S



$$S^{\perp} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \text{ for alle } \vec{v} \text{ i } S \}$$

Hvis $W = \text{span}\{\vec{v}\}$

så er $W^{\perp} = \vec{v}^{\perp}$

EKS $\quad \vec{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\vec{n}^{\perp}$ er plan med ligning

$$2x + 4y + 3z = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$

EKS i $\mathbb{R}^4$

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$$

$S^{\perp}$ består af vektorer $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix}$

som opfylder

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = 2x_1 + 3x_2 + 1 \cdot x_3 + 4x_4 = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{x} = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0$$

$S^{\perp}$ = Nulrummet for $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

Sæt $A = [\vec{u} \ \ \vec{v}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \\ 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad A^T$

$$S^{\perp} = (\text{span } S)^{\perp} = (\text{Col } A)^{\perp} = \text{Null } A^T$$

Generelt: Hvis $W = \text{Col } A$, $A: n \times m$

Så er $W^\perp = \text{Null } A^T$

W og $W^\perp$ er underrom av $\mathbb{R}^n$

$$\dim W = \dim \text{Col } A = \text{rank } A$$

$$\dim W^\perp = \dim \text{Null } A^T = \text{nullity } A^T$$

$$\text{antall søyle i } A^T - \text{rank } A^T =$$

$$n - \text{rank } A = n - \dim W$$

$$\dim W + \dim W^\perp = n$$

$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

Sætning 7

W : underrum af $\mathbb{R}^n$

$\vec{u}$: vektor i $\mathbb{R}^n$

Der findes entydige vektorer $\vec{w}$ i W og $\vec{z}$ i $W^{\perp}$ som opfylder $\vec{u} = \vec{w} + \vec{z}$

$\vec{w}$ kaldes ortogonal projektion af $\vec{u}$ på W