$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & -4 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rank $A = 3$

nullity $A = 2$

Ligningssystem $A\vec{x} = \vec{0}$

Udvidet matrix

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_2 og x_5 frie variable

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$x_3 - x_5 = 0 \Rightarrow x_3 = x_5$$

$$x_4 + 2x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = -2x_5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Definition. A en $m \times n$ matrix.

Rangen af A:
rank $A =$ antal pivot positioner i $A =$ antal søjler i A med pivot.

Nulliteten af A:
nullity $A = n -$ rank $A =$ antal søjler uden pivot.

Antal frie variable i et *konsistent* ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er nullity A.

1.6: span

Hvis $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ er en mængde af vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mængden (underrummet) udspændt af S, skrives span S består af alle vektorer der kan skrives på formen

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \ldots + c_k\mathbf{u}_k,$$

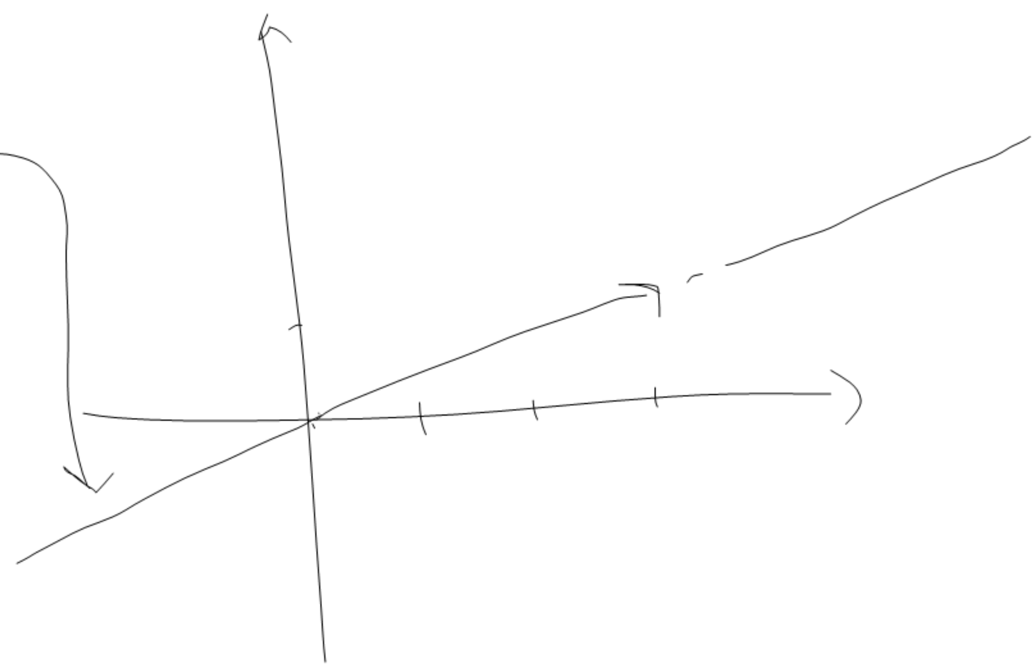
hvor $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

EKS i $\mathbb{R}^2$

$\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$:

vektore på formen

$$c\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

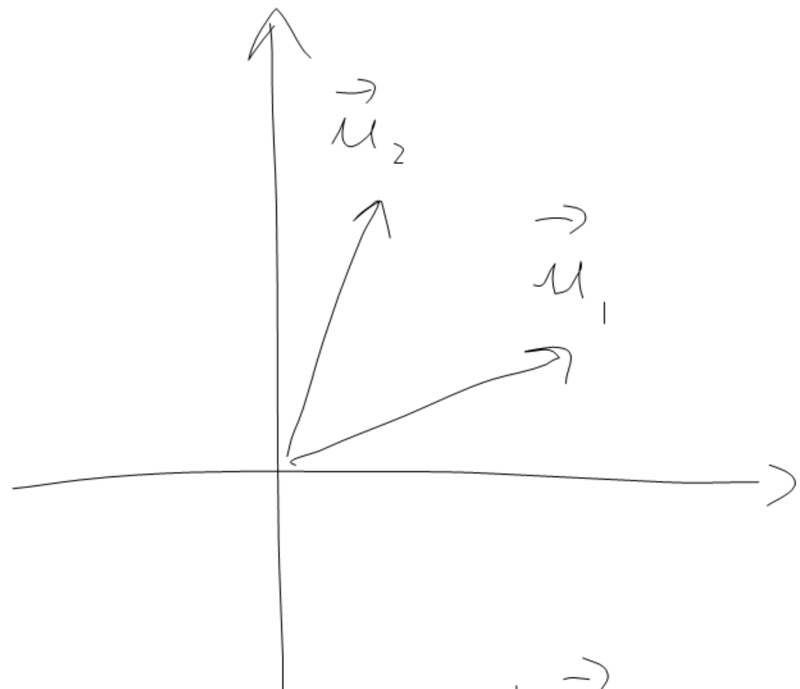


<u>EKS</u> i $\mathbb{R}^2$

$\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ikke-parallelle vektorer i $\mathbb{R}^2$

$\text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

$= \mathbb{R}^2$



Generelt: $\vec{0}$ ligger i $\text{span}\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k\}$

da $\vec{0} = 0\vec{u}_1 + \dots + 0\vec{u}_k$

<u>EKS</u> i $\mathbb{R}^n$

$\text{span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = \mathbb{R}^n$

EKS i $\mathbb{R}^3$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ = plan med ligning

$x - 2y + z = 0$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

EKS

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Er $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ inneholdt i span S

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Udvidet matrix

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ingen pivot i sidste søjle: konsistent

Ja, $\vec{v} \in \operatorname{Span} S$

I udvidet koefficientmatrix på reduceret trappeform:

- pivot position i sidste søjle $\Leftrightarrow$ inkonsistent

  række : $0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \quad 1$

  ligning : $0 = 1$

- pivot i søjle nr. j (ikke sidste søjle) $\Rightarrow$ x_j kan udtrykkes ved $x_{j+1}, \ldots, x_n$

  $$\begin{array}{cccccc|c} 0 & \ldots & 0 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ & & & \uparrow & & & \\ & & & j & & & \end{array}$$

- ikke pivot i søjle nr. $j \Rightarrow x_j$ er fri variable.