EKS

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Er $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineært uafhængige

$$x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 = \vec{0}$$

Udvidet matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Pivot i alle søjler (undtagen sidste)

Ingen frie variable

Eneste løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ lineært uafhængige.

$A = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_k]$ en $n \times k$ matrix.

Sætning 1.8

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ er lineært uafhængige

$\Updownarrow$

A har pivot i alle søjler.

Hvis $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ er lineært uafhængige så er

$k =$ antal søjler $=$ antal pivot positioner $\leq$ antal rækker $= n$.

altså $k \leq n$.

EKS

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Er $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_4$ lineært uafhængige

$$A = \begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 & \vec{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ingen Pivot i søjle 3: $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ er lineært afhængige

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

søjle 1, 2, 4 i

Pivot i alle søjler:

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_4$ er lineært uafhængige

Ligningssystem $x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 = \vec{u}_3$

har udvidet $\left[\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \,\middle|\, \vec{u}_3\right] \xrightarrow{\text{ref}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Konsistent, lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$

$$\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

Sætning 1.9
Hvis $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ er lineært afhængig så er enten

- $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ eller

- en af vektorerne $\mathbf{u}_i$ er linear kombination af $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$

Et ligningssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siges at være homogent hvis $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

$A\vec{x} = \vec{0}$ har altid løsning $\vec{x} = \vec{0}$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Løse $A\vec{x} = \vec{0}$

Udvidet matrix

$$[A \ \vec{0}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

x_3, x_4 er frie variable

$$x_1 + 2x_3 - x_4 = 0$$
$$x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 + x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Løsningsmengde: $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

lineær uavhengige vektorer