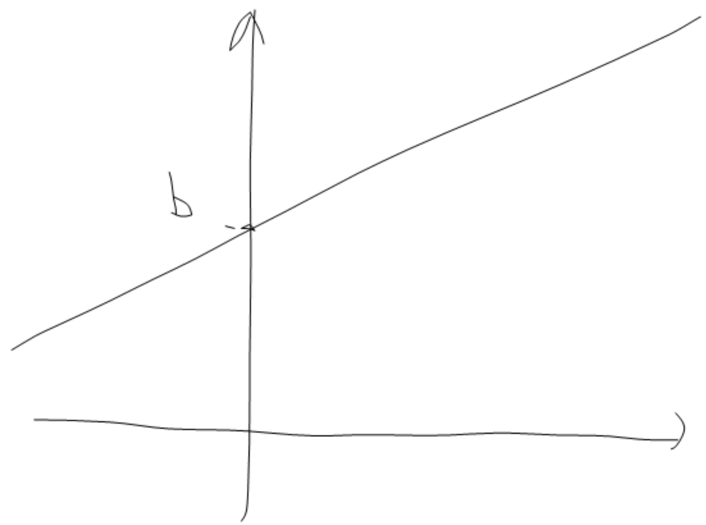
Linear transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

$$T(c\vec{u}) = cT(\vec{u})$$

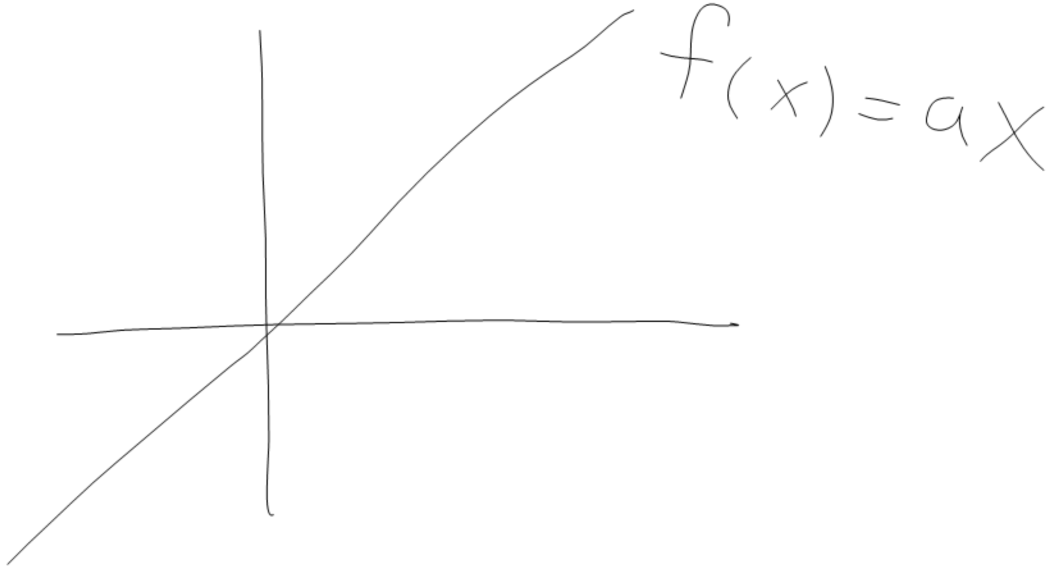
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

Er f linear?



Ja, hvis $b = 0$.

Hvis $f(5) = 7$
og f lineær
bestem $f(x)$



$$a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1)$$

$$f(1) = f\left(\frac{1}{5} \cdot 5\right) = \frac{1}{5} f(5) = \frac{7}{5}$$

Altså $f(x) = \frac{7}{5} x$

EKS $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ linear

$T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$, $T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ kendt

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Find $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Find $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{Find } T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear transformation

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

$$T(\vec{x}) = T\left(x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n\right) =$$

$$x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{bmatrix}}_{\text{Standardmatrix for } T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Billedmængden af T : $\operatorname{Span}\{T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)\}$

2.8 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear

er surjektiv hvis der for ethvert $\vec{b}$ findes $\vec{x}$ som opfylder $T(\vec{x}) = \vec{b}$

Dvs $A\vec{x} = \vec{b}$

hvor A er standardmatricen

Setning 2.10 $\quad A: m \times n$ matrix

$T = T_A$ er på / surjektiv / onto

hvis og kun hvis

A har pivot i alle rekker $\quad \left[\, A \;\middle|\; \vec{b} \,\right]$

(krever: $m \leq n$)

Sætning 2.11 $\quad A : m \times n$

$T = T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær

Følgende betingelser er ækvivalente

1. T er injektiv
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$
3. A har pivot i alle søjler

(kræver at $m \geq n$)

EKS $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, lineær

$$T = T_A \quad \text{hvor} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Pivot i alle rekker : T er surjektiv

Ikke pivot i søyle 3 : T er ikke injektiv