2.3

A : invertibel $n \times n$ matrix

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\Downarrow$$

$$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Indeed $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ i $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$AA^{-1}\vec{b} = \vec{b} \qquad \text{OK}$$

$A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig lösning

Ingen frie variable: pivot i alle søjle

$A\vec{x} = \vec{b}$ er konsistent for alle $\vec{b}$: pivot i alle række.

$$\mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

Elementær matriser er invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E \xrightarrow{R_1-2R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_3 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = F$$

$FE = I_3$ dvs $E^{-1} = F$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E^{-1} = E$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4

A: invertibel $n \times n$ matrix

Rækkeoperationer:

$$A \to E_1 A \to E_2 E_1 A \to \ldots \to$$

$$\underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{P} A = \text{rref}(A) = I_n$$

P invertibel

Altså $\quad A^{-1} = P = E_k \cdots E_2 E_1$

Samme rækkeoperationer på I_n:

$$I_n \longrightarrow E_1 I_n = E_1 \to E_2 E_1 \to \cdots \to$$

$$E_k \cdots E_2 E_1 = A^{-1}$$

Algoritme

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{rref}} [R \mid B]$$

$$R = \text{rref}(A)$$

Hvis $R \neq I_n$ så er A ikke invertibel

Hvis $R = I_n$ så er A invertibel

og $A^{-1} = B$

EKS $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$[A \; I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 2R_1 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = [R \mid B]$$

$R \neq I_2$. A er altså ikke invertibel.

EKS $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A & I_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

A er invertibel, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

2.8

$$f : A \to B$$

Hvis f er injektiv og surjektiv (bijektiv) så findes for ethvert $y \in B$ et entydigt $x \in A$ som opfylder $f(x) = y$

Skrives $x = f^{-1}(y)$

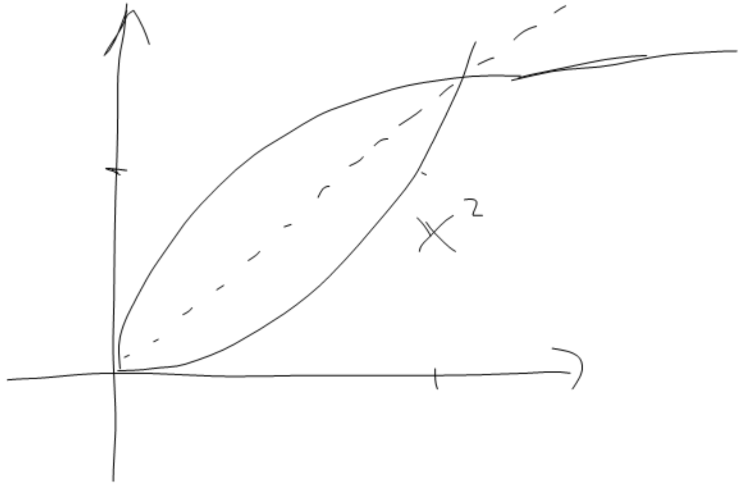
EKS

$$f : \overset{A}{[0, \infty[} \to \overset{B}{[0, \infty[} \quad , \quad f(x) = x^2$$

f er bijektiv

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$f^{-1} : B \to A$$



$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineær, matrix $A : m \times n$

Hvis $n < m$ så er T ikke surjektiv

Hvis $n > m$ så er T ikke injektiv

Hvis T har invers så er $n = m$

og A har pivot i alle rækker/søjler

A er invertibel

$$T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$$

$$T(T^{-1}(\vec{x})) = AA^{-1}\vec{x} = \vec{x}$$