3.1

A : $n \times n$ matrix

(i,j) - kofaktor:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Fortegn
$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \\ + & - & + & - & \\ - & + & - & + & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \dots + a_{1n}c_{1n}$$

Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \dots + a_{in}c_{in}$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter række 2:

$$\det A = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} =$$

$$-a_{21}\det A_{21} + a_{22}\det A_{22} - a_{23}\det A_{23} =$$

$$-1\cdot\det\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + 0 \quad - 2\det\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$-1\cdot(6\cdot 1 - 8\cdot 3) \quad - 2\cdot(4\cdot 3 - 6\cdot 2) =$$

$$-1\cdot(-18) - 2\cdot 0 = 18$$

EKS Øvre triangulær matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 & 8 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter sidste række:

$$\det A = -0 + 0 - 0 + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$2 \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 3$$

= produkt af tal på diagonal.

Rækkeoperationer

Hvis $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$ så er $\det A = -\det B$

Hvis $A \xrightarrow{R_i + cR_j \to R_i} B$ så er $\det A = \det B$

$$EA = B$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 3 & 10 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - 5R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3}}{=}$$

$$-\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 + 9R_2 \to R_3}{=}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 11 = 11$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 9 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det A^T = \det A$

Udvikling efter søjle 2:

$$\det A = -a_{12} \det A_{12} + a_{22} \det A_{22} - a_{32} \det A_{32}$$

$$-0 + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 0 =$$

$$2 \cdot (3 \cdot 2 - 5 \cdot 1) = 2 \cdot 1 = 2$$

3.1

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix}$$

$A - cI_2$. For hvilke c er den invertibel.

$$\det(A - cI_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -10 & 6 \\ -18 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} -10-c & 6 \\ -18 & 11-c \end{bmatrix} =$$

$$(-10-c)(11-c) - 6(-18) =$$

$$-110 + 10c - 11c + c^2 + 108 =$$

$$c^2 - c - 2$$

$A - cI$ ikke invertibel

$\Updownarrow$

$$c^2 - c - 2 = 0 \qquad D = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) = 9$$

$$\Updownarrow$$

$$c = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c \qquad D = b^2 - 4ac}$$