4.2

EKS Søjlerum

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Søjler uden pivot er linear kombinationer af søjler med pivot.

Søjler med pivot er lineart uafhængig.

Basis for Col A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

Generelt

A : $m \times n$ matrix

Søjler med pivot udgør basis for Col A

Sætning 4.3 (Reduktion)

$V = \text{span}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ et underrum af $\mathbb{R}^n$

Så findes en delmængde af $\{\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k\}$ som er basis for V.

Bevis

$$A = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_k]$$

Søjler med pivot udgør en basis for $\mathrm{Col}\, A = V$.

Basis for $\mathbb{R}^n$

Lad $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_m\}$

være en basis for $\mathbb{R}^n$.

Sæt $B = [\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \dots\ \vec{b}_m]$

Da $\text{span}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m\} = \mathbb{R}^n$ så har

$\underline{B}$ pivot i alle rækker.

Da $\vec{b}_1 \ldots \vec{b}_m$ er lineært uafhængige

så har B pivot i alle søjler

n = antal rækker = antal pivotpositioner =

antal søjler = m

Enhver basis for $\mathbb{R}^n$ har n vektorer.

Omvendt: $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\}$ i $\mathbb{R}^n$

Hvis $B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$ har pivot i alle rækker/søjler

(altså $\text{rref}(B) = I_n$ og B har invers)

Så er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$.

<u>EKS</u>

Er $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ basis for $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

JA

"<u>Sætning 4.4</u>" Udvid til basis

Ethvert underrum V af $\mathbb{R}^n$
har en basis
(Undtagen $V = \{\vec{0}\}$)

<u>Bevis</u>

Lad $\vec{v}_1 \in V$, $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$

Hvis $\text{span}\{\vec{v}_1\} = V$ så er $\{\vec{v}_1\}$ basis.
Ellers vælg $\vec{v}_2 \in V$ men $\vec{v}_2$ er ikke

i span$\{\vec{v}_1\}$

Hvis span$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = V$ så er $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ basis for V

Ellers velg $\vec{v}_3$ .....

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ er lineært uavhengig

For ellers: enten $\vec{v}_1 = \vec{0}$

eller $\vec{v}_i \in \text{span}\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_{i-1}\}$ for et i