4.3

A : $m \times n$ matrix

$\dim \mathrm{Col}\, A = \mathrm{rank}\, A$

$\dim \mathrm{Null}\, A = \mathrm{nullity}\, A = n - \mathrm{rank}\, A$

Rækkerum af A:

$\mathrm{Row}\, A$ = underrummet af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækker.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \text{Col} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} = \text{Col } A^T$$

Generelt $\quad \text{Row } A = \text{Col } A^T$

$$V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$$

$$W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2 + k\vec{v}_4, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$$

Hvis $\vec{u}$ ligger i W:

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2(\vec{v}_2 + k\vec{v}_4) + a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4 + a_5\vec{v}_5$$

$$= a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + (a_2k + a_4)\vec{v}_4 + a_5\vec{v}_5$$

$\vec{u}$ ligger i V

Hvis $\vec{u}$ ligger i V:

$$\vec{u} = b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + \ldots + b_5\vec{v}_5 =$$

$$= b_1\vec{v}_1 + b_2(\vec{v}_2 + k\vec{v}_4) + b_3\vec{v} + (b_4 - b_2 k)\vec{v}_4 + b_5\vec{v}_5$$

$\vec{u}$ ligger i W

Altså $V = W$

Hvis $A \xrightarrow{R_i + kR_j \to R_i} B$ (i eks. $i=2$, $j=4$)

så er $\text{Row}\, A = \text{Row}\, B$

Hvis $A \xrightarrow{cR_i \to R_i} B$ eller $A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$

så er $\text{Row } A = \text{Row } B$

$$\text{Row } A = \text{Row } \text{rref}(A)$$

Rækker i $\text{rref}(A)$ med pivot udgør en basis for $\text{Row } A$.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & -1 & 2 \\ 0 & \underline{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for Row A: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Vigtigt: basisvektorerne er fra rref(A)

De to tilsvarende rækker i A er lineært afhæng.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 3 & 7 & 11 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} \underline{1} & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis for Row A = Col A^T : $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$

Vigtigt: basisvektorene er fra A^T

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ligger ikke i søjlerummet.

$$\dim \text{Row } A = \text{antal rækker med pivot}$$

$$= \text{rank } A$$

$$\dim \text{Row } A = \dim \text{Col } A^T = \text{rank } A^T$$

$$\text{rank } A^T = \text{rank } A$$

Hvis V er et underrum af $\mathbb{R}^n$

og $V \neq \{\vec{0}\}$ så har basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$

Altså $V = \text{span}\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\} = \text{Col}\begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \dots & \vec{b}_k \end{bmatrix}$

Ethvert underrum af $\mathbb{R}^n$ er søjlerum af en matrix

F.eks $\{\vec{0}\} = \text{Col}\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Desuden: ethvert underrum af $\mathbb{R}^n$

er nulrum af en matrix