A : standardmatrix for T linear operator

$\mathcal{B}$ basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\}$, $B = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$

$$[T]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1} \vec{v}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1} A B \; B^{-1} \vec{v} = B^{-1} A \vec{v} =$$

$$B^{-1}T(\vec{v}) = [T(\vec{v})]_B$$

$$[T(\vec{v})]_B = [T]_B [\vec{v}]_B$$

<u>EKS</u>

T : lineær operator på $\mathbb{R}^3$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ basis for $\mathbb{R}^3$

Find matrix representation of T
w.r.t. basis $\mathcal{B}$.

standard matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_\mathcal{B} = B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Hvis $\vec{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

så er $[\vec{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[T(\vec{v})]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[\vec{v}]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{v}) = -\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\4\\5\end{bmatrix} = A\vec{v}$$

<u>5.1</u> Definition

T : lineær operator på $\mathbb{R}^n$

$\vec{v}$ vektor i $\mathbb{R}^n$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

Hvis der findes et tal λ som opfylder

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

så kaldes $\vec{v}$ egenvektor og λ egenværdi.

<u>EKS</u> Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

T : lineær operator på $\mathbb{R}^3$ opfylder

$$T(\vec{b}_1) = 2\vec{b}_1$$

$$T(\vec{b}_2) = -3\vec{b}_2$$

$$T(\vec{b}_3) = \vec{b}_3$$

$\mathcal{B}$ basis der består af egenvektorer.

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(\vec{b}_3)]_{\mathcal{B}} \right]$$

$$= \left[[2\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} \quad [-3\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} \quad [\vec{b}_3]_{\mathcal{B}} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Standard matrix

$$A = B\,[T]_{\mathcal{B}}\,B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 7 & -5 & 2 \\ 7 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$T\Big(T(\vec{v})\Big) = T^2(\vec{v}) = AA\vec{v} = A^2\vec{v}$$

$$T^{10}(\vec{v}) = A^{10}\vec{v}$$

$$A = B\,[T]_{\beta}\,B^{-1}$$

$$A^2 = B[T]_{\beta}B^{-1}\,B[T]_{\beta}B^{-1} =$$

$$B\,[T]_{\beta}^2\,B^{-1}$$

$$A^{10} = B \, [T]_{\mathcal{B}}^{10} \, B^{-1}$$

$$= B \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1}$$