5.2

A : $n \times n$

$n=2$ $\det(A - tI_2) = t^2 + bt + c$

$n=3$ $\det(A - tI_3) = -t^3 + bt^2 + ct + d$

Generelt $\det(A - tI_n)$ er et polynomium af grad n.

Kaldes: karakteristisk polynomium.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Find egenværdier

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 2-t & -1 & 1 \\ 2 & 1-t & -2 \\ 2 & -1 & -t \end{bmatrix}$$

1. række

$$= (2-t)\det\begin{bmatrix} 1-t & -2 \\ -1 & -t \end{bmatrix} - (-1)\det\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -t \end{bmatrix} +$$

$$1 \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 1-t \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$(2-t)\Big((1-t)\cdot(-t)-(-2)(-1)\Big)+\big(2\cdot(-t)-(-2)\cdot 2\big)+$$

$$\big(-2-(1-t)\cdot 2\big) =$$

$$(2-t)(-t+t^2-2)\underline{-2t+4-2-2+2t} =$$

$$-(t-2)(t^2-t-2) = -(t-2)(t-2)(t+1) =$$

$$-(t-2)^2(t+1)$$

Egenværdier 2 og -1

Find egenrum hørende til $\lambda = 2$

$$A - 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_3 er fri variabel

$$x_1 - \frac{3}{2}x_3 = 0$$

$$x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenrom: $\operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Dimension 1.

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 3-t & 1 & 2 \\ 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & -t \end{bmatrix} \underset{\text{1. søyle}}{=}$$

$$(3-t)\det\begin{bmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{bmatrix} = (3-t)(t^2+1)$$

$$= -(t-3)(t^2+1)$$

Karakteristisk ligning

$$-(t-3)(t^2+1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$t = 3$ eller $t^2+1=0$

ingen løsning

Egenværdier: 3

Generelt for en $n \times n$ matrix A:
Hvis de forskellige løsninger til $\det(A - tI_n) = 0$ er $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ så er

$$\det(A - tI_n) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \ldots (t - \lambda_k)^{m_k} g(t)$$

hvor $g(t)$ ikke har nogen rødder.
F.eks.: $g(t) = \pm 1$ eller $g(t) = t^2 + 1$ eller ...
m_i kaldes multipliciteten af λ_i

Sætning 5.1:
Hvis λ er egenværdi for A så er

$$1 \leq \text{dimension af egenrummet for } \lambda \leq \text{multipliciteten af } \lambda.$$

I

EKS

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -10 \\ 5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(\underline{t+12})(\underline{t-8})^2$$

Egenværdier:

-12 med multiplicitet 1

8 med multiplicitet 2

Egenrom for $\lambda = 8$

$$A - 8I_3 = \begin{bmatrix} -2 & 10 & -10 \\ 5 & 3 & 5 \\ -5 & 5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & 10 & -10 \\ 5 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{red}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

To frie variable: x_2, x_3

Dimension of egenrom: 2.