Sætning 5.2

A en $n \times n$ matrix.

Hvis $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$
der består af egenvektorer

$$A\mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1, \ldots, A\mathbf{p}_n = \lambda_n \mathbf{p}_n.$$

Så er

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \ldots\ \mathbf{p}_n]$ og $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$

Og omvendt . . .

$$A = PDP^{-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$AP = PD$$

$$\Updownarrow$$

$$A\begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{p}_1 & \cdots & \vec{p}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A\vec{p}_1 & \cdots & A\vec{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \vec{p}_1 & \cdots & \lambda_n \vec{p}_n \end{bmatrix}$$

<u>Eks</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Egenverdier

$\lambda = 5$ basis for egenrom $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\lambda = 1$ basis for egenrom $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Så er

$A = PDP^{-1}$

$$2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$ er også egenvektor med $\lambda = 5$

$$-3\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\-3\end{bmatrix}$$ er også egenvektor med $\lambda = 1$

Sett $P = \begin{bmatrix}2 & 9\\2 & -3\end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

Sætning 5.3

A en $n \times n$ matrix.

Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er egenvektorer for A hørende til forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineært uafhængige.

Algoritme, diagonalisering af A: $n \times n$

Find alle egenværdier.

Find basis for hvert egenrum.

List alle disse basisvektorer

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$

Hvis $k = n$ så er $\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n\}$ basis for $\mathbb{R}^n$

Sæt $P = [\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_n]$ $D = \begin{bmatrix} \text{egen-} & & \\ & \text{værdi-} & \\ & & \text{er} \end{bmatrix}$

Så er $A = PDP^{-1}$

$A : n \times n$

A er diagonaliserbar hvis

- summen af egenværdiers multipliciteter $= n$
- dim. af egenrum $=$ multiplicitet

EKS A: 7×7

$$\det(A - tI_7) = -(t-2)^3(t+4)^2(t^2+1)$$

Sum af multipliciteter: $3+2=5 < 7$

A er ikke diagonaliserbar.

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - tI_3) = -(t-3)(t-1)^2$$

Sum af multipliciteter: $1+2=3$ ✓

Egenrum, $\lambda = 1$

$$A - I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Én fri variabel x_3

dim af egenrum $= 1 <$ multiplicitet

A ikke diagonaliserbar.

<u>EKS</u> A : 4×4 matrix

$$\det(A - tI_4) = (t+3)(t+1)(t-2)(t-5)$$

Egenværdier: $-3, -1, 2, 5$

Hver med multiplicitet 1

Lad $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$ være egenvektor hørende til hhv $-3, -1, 2, 5$.

Sol $P = \begin{bmatrix} \vec{P}_1 & \vec{P}_2 & \vec{P}_3 & \vec{P}_4 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Så er $A = PDP^{-1}$

MATLAB

$A = [\quad]$

$[P, D] = eig(A)$

Hvis A er diagonaliserbar så

$$A = PDP^{-1}$$