$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Basis for $\mathbb{R}^3$

Find ortogonal basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 - \frac{\vec{u}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2}\vec{v}_2 =$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$ en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$ en ortonormal basis

$A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_k]$ en $n \times k$ matrix

med lineært uafhængige søjler.

Så er $\{\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_k\}$ basis for Col A

Find en ortogonal basis $\{\vec{v}_1 \ \dots \ \vec{v}_k\}$

og en ortonormal basis $\{\vec{w}_1 \ \dots \ \vec{w}_k\}$

for Col A

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = 4$$

$$\vec{v}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = 4$$

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3 = 4$$

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ is orthogonal basis.

$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{4} = 2$, $\|\vec{v}_2\| = 2$, $\|\vec{v}_3\| = 2$

$\vec{w}_1 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \frac{1}{2}\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{w}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ is orthonormal basis for Col A

Skriv $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_k$ som linear kombination af $\vec{w}_1 \dots \vec{w}_k$

$$\vec{a}_1 = r_{11}\vec{w}_1 + r_{21}\vec{w}_2 + r_{31}\vec{w}_3$$

$$r_{11} = \vec{a}_1 \cdot \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

$r_{21} = \vec{a}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$ da $\vec{a}_1$ og $\vec{w}_2$ ortogonal

$$r_{31} = \vec{a}_1 \cdot \vec{w}_3 = 0$$

$$\vec{a}_2 = r_{12}\vec{w}_1 + r_{22}\vec{w}_2 + r_{32}\vec{w}_3 = 2\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 + 0\,\vec{w}_3$$

$$\vec{a}_3 = r_{13}\vec{w}_1 + r_{23}\vec{w}_2 + r_{33}\vec{w}_3 = 2\vec{w}_1 + 2\vec{w}_2 + 2\vec{w}_3$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ övre triangulær.

$$Q = \begin{bmatrix} \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$QR = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} = A$$

QR - faktorisering af A.

Lös

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

$$QR\vec{x} = \vec{b}$$

$$\underbrace{Q^T Q}_{I_3} R\vec{x} = Q^T\vec{b}$$

$$I_3 R\vec{x} = Q^T\vec{b}$$

$$R\vec{x} = Q^T\vec{b}$$