7.5

Q: ortogonal matrix $n \times n$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ vektorer i $\mathbb{R}^n$

$$Q\vec{u} \cdot Q\vec{v} = (Q\vec{u})^T Q\vec{v} =$$

$$\vec{u}^T Q^T Q \vec{v} = \vec{u}^T I_n \vec{v} =$$

$$\vec{u}^T \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\| Q\vec{u} \| = \sqrt{Q\vec{u} \cdot Q\vec{u}} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \| \vec{u} \|$$

Q bevarer længde, afstand (og vinkel)

<u>Sætn 7.9</u> Q : $n \times n$ matrix

Q er ortogonal

hvis og kun hvis

$\|Q\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$ for alle vektorer $\vec{u}$

EKS

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det Q = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = -1$$

Q er standardmatrix for en spejling med akse W = egenrummet hørende til egenværdi 1.

Egenrum $\lambda = 1$

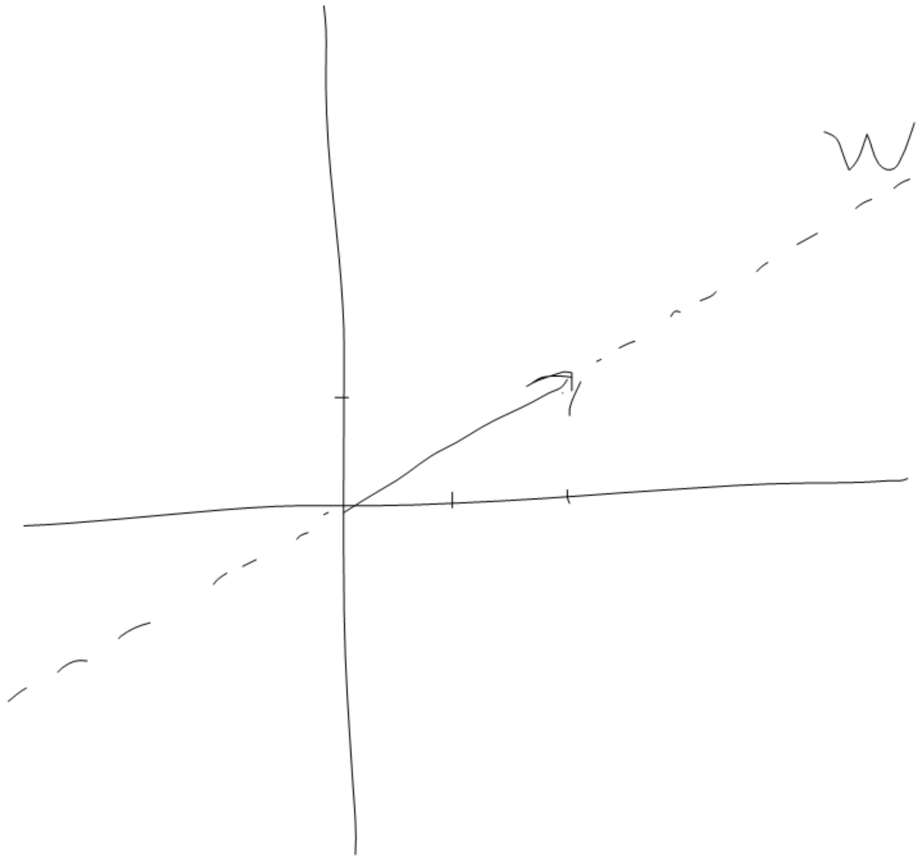
$$Q - I_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{5}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} - \frac{5}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2 fri , $x_1 - 2x_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Q : ortogonal $n \times n$ matrix

$Q^T Q = I_n$ betyder at $Q^{-1} = Q^T$

Dermed $Q Q^{-1} = I_n$

$$Q Q^T = I_n$$

$$(Q^T)^T (Q^T) = I_n$$

Q^T er ortogonal

Rækkerne i Q er ortonormale

Q : 3×3 matrix

Q er standardmatrix for en rotation om en akse gennem $(0,0,0)$

hvis og kun hvis

Q er ortogonal og $\det Q = 1$

EKS

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ortogonal}$$

$$\det Q = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{27}\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{27}\det\begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{27}\cdot\left(-3\cdot 3 - 6\cdot(-6)\right) = 1$$

Q er standardmatrix for rotation om en akse W, som er egenrum hørende til egenværdi 1

<u>Egenrum, $\lambda = 1$</u>

$$Q - I_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2 \quad , x_3 = 0 \qquad x_2$ fri

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Akse: $\quad W = \operatorname{span} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

P, Q ortogonale $n \times n$ matricer

$$(PQ)^T (PQ) = Q^T \underbrace{P^T P}_{I_n} Q = Q^T Q = I_n$$

PQ er ortogonal

Hvis $\det Q = \det P = 1$ så er $\det PQ = \det P \cdot \det Q = 1$

Hvis P og Q er rotationer i $\mathbb{R}^3$
så er PQ også en rotation.