1.4 Åbent udsagn

EKS $x > 4$ er ikke et udsagn

men et åbent udsagn.

Egenskaben ">4" kaldes et prædikat.

Et åbent udsagn er en påstand med variable

$P(x)$, $P(x,y)$, $P(x,y,z)$ ....

som bliver et udsagn når de variable gives en værdi.

<u>EKS</u> $P(x)$ betegner det åbne udsagn

$x^2 > 5$

$P(2)$: $2^2 > 5$ udsagn F

$P(3)$: $3^2 > 5$ T

EKS

$P(x, y)$ betegner $x > y$

$P(2, 3)$ udsagn: $2 > 3$ F

$P(5, 4)$ udsagn $5 > 4$ T

$P(x, 7)$: $x > 7$ åbent udsagn

De variable antager værdier i en grundmængde (Universe) U

EKS $P(x)$: x forstår russisk

U : mængde af personer.

Alkvantor

$P(x)$: åben udsagn

$\forall x P(x)$ er udsagnet : $P(c)$ er sand for ethvert c (i grundmængden)

EKS $P(x)$ betegner $x^2+1>0$, $U=\mathbb{R}$

$\forall x\, P(x)$, $\forall x\,(x^2+1>0)$

er et sandt udsagn, da $x^2+1>0$ for alle x

$\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1>0$

$Q(x)$ betegner $x^3+1>0$

$\forall x\, Q(x)$ er et falsk udsagn, da $(-1)^3+1=0 \not> 0$

-1 er et modeksempel.

Eksistenskvantor

$P(x)$: åbent udsagn

$\exists x\, P(x)$ er udsagnet: der findes c (i U) som opfylder $P(c)$ er sand.

$\exists x\, (x^3 + 1 > 0)$ er sand da $0^3 + 1 = 1 > 0$

<u>EKS</u> $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $P(x)$ åbent udsagn

$$\exists x\, P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

$$\forall x\, P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

$$\neg \forall x\, P(x) \equiv \neg\big(P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)\big)$$

$$\equiv \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$$ de Morgan

$$\equiv \exists x\, \neg P(x)$$

Generelt (de Morgan)

$$\neg \forall x \, P(x) \equiv \exists x \, \neg P(x)$$

$$\neg \exists x \, P(x) \equiv \forall x \, \neg P(x)$$

EKS $\forall x \left((x > 2) \rightarrow (x^2 + 1 > 5) \right)$

sand, da hvis $x > 2$ så er $x^2 > 4$ og dermed $x^2 + 1 > 5$

1.5

$P(x,y)$ åbent udsagn

$\forall x\, P(x,y)$ åbent udsagn

Udsagn $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$

$P(x,y)$ er sand for alle kombinationer af x og y

$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$

$P(x,y)$ er sand for mindst én kombination af x og y

EKS

$\forall x \exists y\ (x < y)$ for ethvert x findes et større tal y. T

$\exists y \forall x\ (x < y)$ der findes tal y større end alle andre tal. F

$\exists x \forall y\ (x < y)$ F

$\forall y \exists x\ (x < y)$ T

$\forall x \exists y\ (x^2 < y)$ T

$\forall y \exists x\ (x^2 < y)$ F, vælg $y < 0$

EKS

$$\neg \forall x \exists y\, Q(x,y) \equiv \exists x \neg \exists y\, Q(x,y) \quad \text{de Morgan}$$

$$\equiv \exists x \forall y \neg Q(x,y)$$

1.6 Slutningsregler.

Fra tidligere: $(p \wedge (p \to q)) \to q$ er en tautologi.

hvis $\quad p \quad$ sand

og $\quad p \to q \quad$ sand

så $\quad q \quad$ sand

Skrives

$$\begin{array}{ll} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Denne regel kaldes modus ponens

Tautologi $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

Slutningsregel

$$\begin{array}{rl} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

Kædeslutningsregel

$$\begin{array}{rl} & P(c) \text{ er sand for ethvert } c \\ \hline \therefore & \forall x P(x) \end{array}$$

Universel generalisering

$$\frac{\forall x\, P(x)}{\therefore \quad P(c)}$$ sand for ethvert c

Universel instantiation

<u>EKS</u> Vi ved $\forall x\left((x^2<100) \rightarrow (x<10)\right)$

og $\forall x\left((x<10) \rightarrow 2^x<1024\right)$

Bevis $\forall x\left((x^2<100) \rightarrow (2^x<1024)\right)$

Bevis

1. $\forall x((x^2 < 100) \to (x < 10))$ givet
2. $(c^2 < 100) \to (c < 10)$ for ethvert c Uni. Inst.
3. $\forall x((x < 10) \to (2^x < 1024))$ givet
4. $(c < 10) \to (2^c < 1024)$ for ethvert c Uni Inst
5. $(c^2 < 100) \to (2^c < 1024)$ for ethvert c kædeslutning fra 2 og 4.

6. $\forall x((x^2 < 100) \to (2^x < 1024))$ Universel generalisering