2.1

“Definition:” En mængde er en ikke-ordnet samling af objekter, som kaldes elementer i mængden.
Et objekt a er element i mængden A: $a \in A$.

En mængde A siges at være delmængde af en mængde B, skrives $A \subseteq B$ hvis ethvert element i A også er element i B, altså hvis $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Vigtige mængder:
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. De hele tal.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. De naturlige tal.
$\mathbb{R}$. De reelle tal.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}.$$

1.8 + 1.9: Beviser.

Sætning (Theorem): et vigtigt udsagn, der kan bevises.

Proposition: et mindre vigtigt udsagn, der kan bevises.

Lemma: et mindre vigtigt udsagn, der kan bevises. Et lemma er en “hjælpesætning”, der bruges i beviset for en sætning.

Korollar (Corollary): et udsagn, der *let* kan bevises, når man har bevist en sætning.

Formodning (Conjecture): et udsagn, som man tror er sandt. Men indtil nu er det ikke lykkedes at beviset det. Eller modbevis det.

Definition

Et tal $n \in \mathbb{Z}$ er

- lige hvis der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k$
- ulige hvis der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k+1$

Sætning (kan bevises)

Ethvert helt tal er enten lige eller ulige men ikke både lige og ulige.

Udsagn af typen $\forall x(P(x) \to Q(x))$

Bevise at $P(c) \to Q(c)$ for ethvert c

og brug universal generalisation.

Direkte bevis

Sætning A (Ex 1)

Hvis n er ulige så er n^2 ulige.

Bevis

Lad $n \in \mathbb{Z}$ være ulige.

DVS: der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k+1$

Så er $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+1+4k =$

$$2(2k^2+2k)+1$$

Da $2k^2+2k \in \mathbb{Z}$ så er n^2 ulige. $\square$

<u>Korollar</u>

Hvis $n \in \mathbb{Z}$ og n^2 er lige så er n lige.

<u>Bevis</u> Dette er det kontrapositive af Sætning A.

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

<u>Bevis ved</u> kontraposition (indirekte bevis)

$$P(c) \to Q(c) \equiv \neg Q(c) \to \neg P(c)$$

Giv et direkte bevis for kontrapositive

<u>Sætning B</u>

Lad $n \in \mathbb{Z}$

Hvis n^2 er ulige så er n ulige

<u>Bevis</u> ved kontraposition

Kontrapositive udsagn

Hvis n lige så er n^2 lige.

Lad n være lige.

Der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k$.

$$n^2 = (2k)^2 = 2 \cdot 2k^2$$

Da $2k^2 \in \mathbb{Z}$ så er n^2 lige. $\square$

Forsøg på direkte bevis: lad $n \in \mathbb{Z}$ så n^2 ulige

Der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n^2 = 2k+1$

Så er $n = \pm\sqrt{2k+1}$???

<u>Definition</u> Et tal $r \in \mathbb{R}$ er rationalt hvis der findes $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ så $r = \frac{p}{q}$

Ellers er r irrational.

<u>Sætning</u>

$\sqrt{2}$ er irrational

<u>Bevis</u> ved modstrid

Antag at $\sqrt{2}$ er rational.

DVS: der findes $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$

så $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ en uforkortelig brøk

$$\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

Så er $2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

og $2b^2 = a^2$

Altså a^2 er lige. Dermed er a lige.

Der findes $c \in \mathbb{Z}$ så $a = 2c$

Så er $2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$

og $b^2 = 2c^2$

Altså b^2 er lige og dermed b er lige.

Der findes $d \in \mathbb{Z}$ så $b = 2d$.

Nu er $\sqrt{2} = \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d}$ uforkortelig.

Men vi kan forkorte med 2.

Modstrid.

Antagelse $\sqrt{2}$ rational er forkert.

Altså $\sqrt{2}$ er irrational. $\square$

Sætning

Lad $n \in \mathbb{Z}$.

Så er følgende udsagn ækvivalente

1. n er ulige
2. n^2 er ulige

Bevis

$1 \to 2$ Sætning A

$2 \to 1$ Sætning B

Sætning

Lad $n \in \mathbb{Z}$.

Så er $n^2 + 3n + 5$ ulige.

Bevis ved inddeling i tilfælde.

n er enten lige eller ulige.

Tilfælde 1: n lige

DVS der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k$

$$n^2 + 3n + 5 = (2k)^2 + 3 \cdot 2k + 5 = 4k^2 + 6k + 5 =$$

$$2(2k^2 + 3k + 2) + 1$$ er ulige.

Tilfælde 2: n ulige

DVS der findes $k \in \mathbb{Z}$ så $n = 2k+1$

$$n^2 + 3n + 5 = (2k+1)^2 + 3(2k+1) + 5 =$$

$$4k^2 + 1 + 4k + 6k + 3 + 5 = 4k^2 + 10k + 9 =$$

$$2(2k^2 + 5k + 4) + 1$$ er ulige.

$\square$

<u>Vacuous</u> (tomt) bevis

EKS: Hvis $\underbrace{n \text{ er lige og } n \text{ er ulige}}_{\text{altid Falsk}}$, så er n^2+7 et primtal

Trivielt bevis

EKS: Hvis n^2+7 er primtal så er enten $\underbrace{n \text{ lige eller } n \text{ ulige}}_{\text{altid Sand}}$

2.1

$\{1, 3, 4, 8\}$

Mængdebygger notation:

$\{x \mid P(x)\}$ eller $\{x \in U \mid P(x)\}$

Rationale tal

$$\mathbb{Q} = \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \text{der findes } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \text{ så } r = \frac{p}{q} \right\}$$

<u>Definition</u>

To mængder A og B er ens, skrives $A = B$

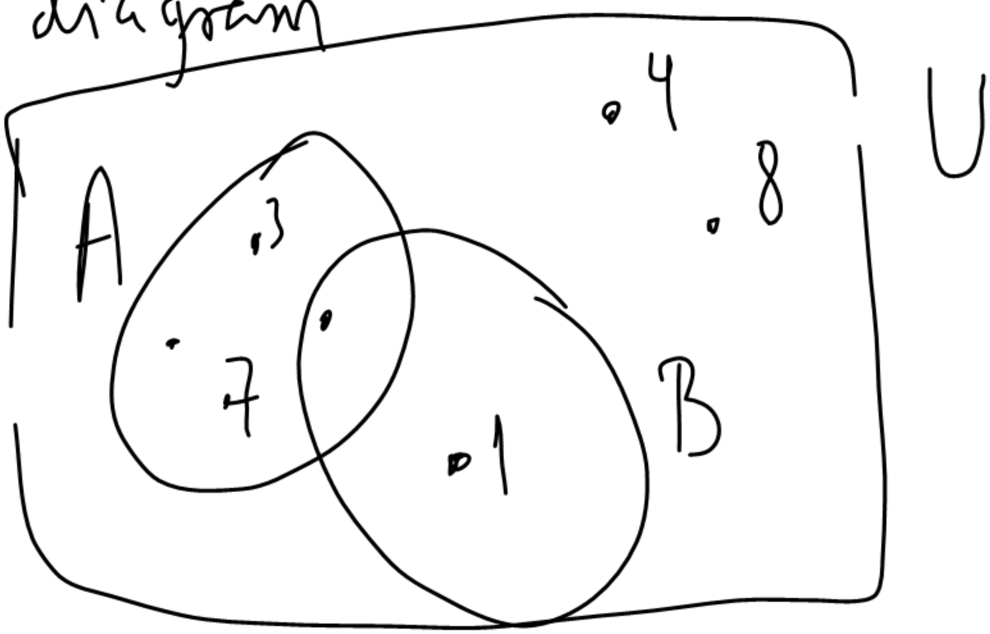
hvis $\forall x \, (x \in A \longleftrightarrow x \in B)$.

ækvivalent med

$$\forall x(x \in A \to x \in B) \land \forall x(x \in B \to x \in A)$$

Altså $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$

Venn diagram



DEF: Potensmængde

Lad S være en mængde

Mængden af alle delmængder af S kaldes potensmængden af S, skrives $P(S)$.

EKS

$$S = \{1, 2, 3\}$$

$$P(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

DEF

Lad A og B være mængder.

Det kartesiske produkt

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

EKS

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$