2.3: Funktioner

Definition. En funktion f fra en mængde A til en mængde B, skrives $f : A \mapsto B$, knytter til hvert element $x \in A$ et entydigt element $f(x) \in B$.

A kaldes definitionsmængden (domænet) for f.
B kaldes (codomænet) for f.

For $S \subseteq A$ kaldes $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ billedet (image) af S.

$f(A)$ kaldes billedmængden (range) af f.

Lad $f : A \mapsto B$ være en funktion, hvor A og B er vilkårlige mængder.

f siges at **enentydig** eller **injektiv** (one-to-one, $1-1$) hvis

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A((f(x_1) = f(x_2) \to (x_1 = x_2)).$$

Dette er ækvivalent med

$$\forall x_1 \in A \forall x_2 \in A((x_1 \neq x_2) \to (f(x_1) \neq f(x_2)).$$

f siges at være **på** eller **surjektiv** (onto) hvis

$$\forall b \in B \exists a \in A(f(a) = b).$$

Hvis f er injektiv og surjektiv så siger vi at f er **bijektiv**.

Sammensat funktion:

Hvis $f : A \mapsto B$ og $g : B \mapsto C$
så er $g \circ f : A \mapsto C$ funktionen, der opfylder $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

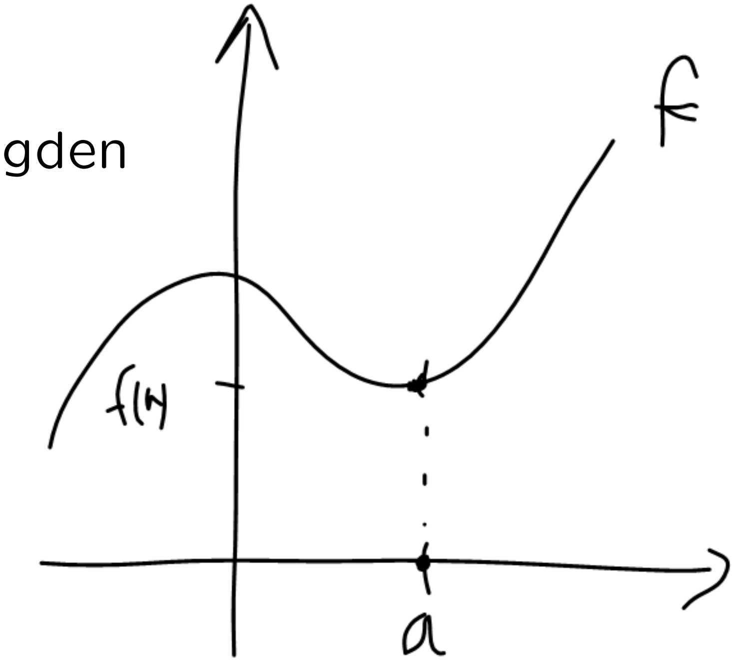
Hvis $f : A \mapsto B$ er bijektiv så findes der for ethvert element $b \in B$ et entydigt element $a \in A$ som opfylder $f(a) = b$. Dette entydige element skrives $a = f^{-1}(b)$.
Så er $f^{-1} : B \mapsto A$ også en funktion. Den kaldes f's **inverse funktion**.

$f^{-1} \circ f : A \mapsto A$ og $f \circ f^{-1} : B \mapsto B$ er funktioner der opfylder $(f^{-1} \circ f)(a) = a$, for alle $a \in A$ og $(f \circ f^{-1})(b) = b$ for alle $b \in B$.

Grafen af en funktion $f : A \mapsto B$ er mængden

$$\{(a, f(a)) \mid a \in A\},$$

som er en delmængde af $A \times B$.



En delmængde F af $A \times B$ er grafen for en funktion hvis den opfylder:
for ethvert $a \in A$ findes der et *entydig* $b \in B$ så $(a, b) \in F$.

For $x \in \mathbb{R}$ er
$\lceil x \rceil$ det mindste hele tal, større end eller lig med x (x rundet op).
$\lfloor x \rfloor$ det største hele tal, mindre end eller lig med x (x rundet ned).

App 2

For $b \in \mathbb{R}^+$ og $n \in \mathbb{Z}$ er

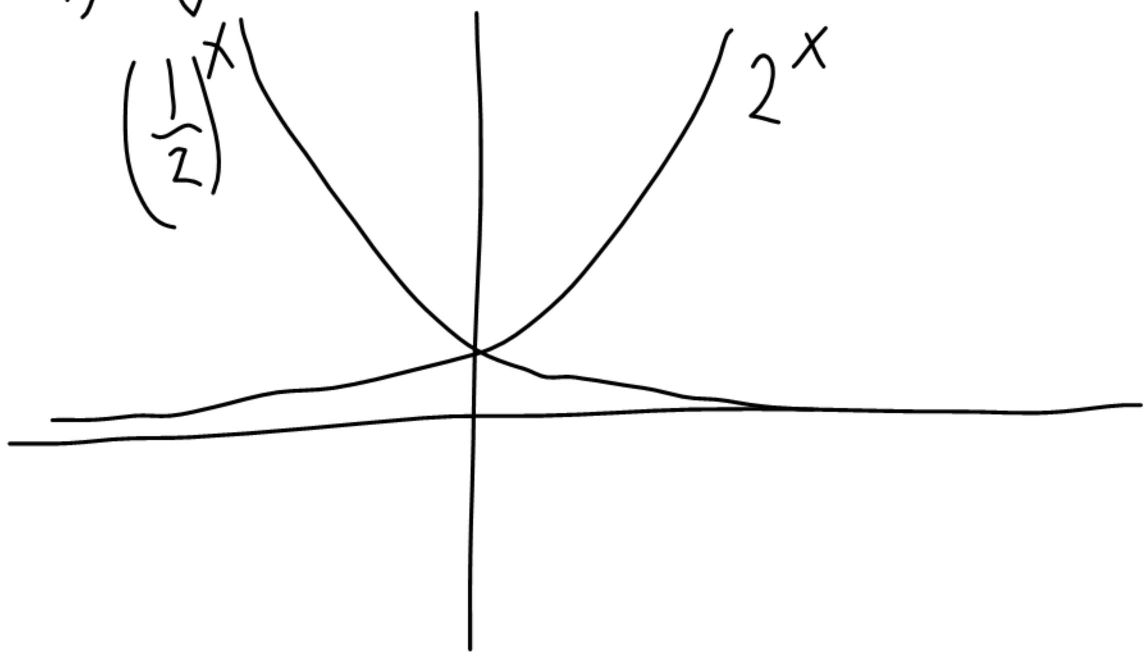
$$b^n = \begin{cases} \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n} , & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ \dfrac{1}{b^{|n|}} & n < 0 \end{cases}$$

Kan udvides til $f_b(x) = b^x$ for $x \in \mathbb{R}$.

$f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ er bijektiv, exponential funktion

Voksende hvis $b > 1$

Aftagende hvis $b < 1$



$$b^{x+y} = b^x b^y \quad , \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

f_b har en invers funktion

$\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ logaritmefunktion

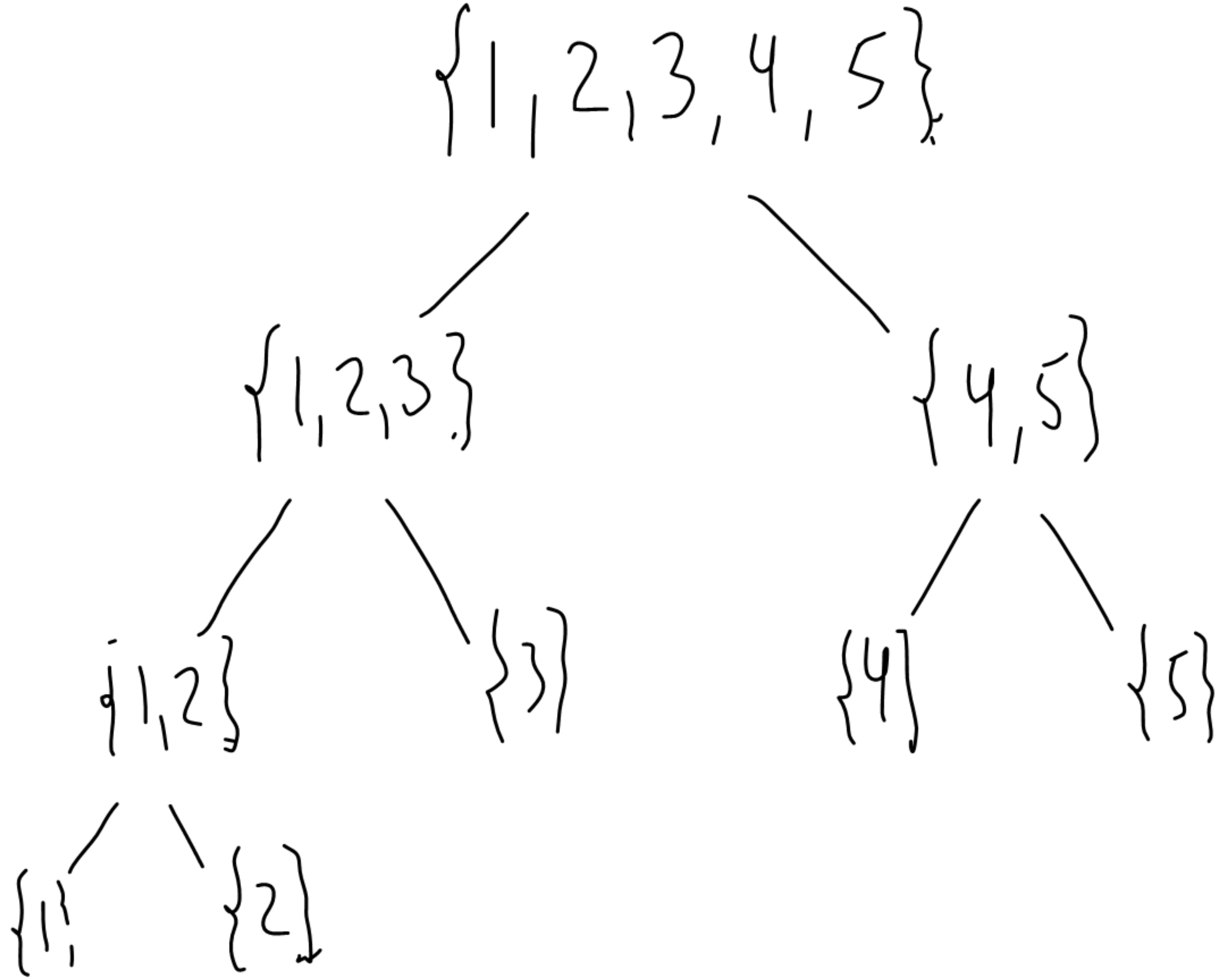
$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$

$\log_b x^y = y \log_b x$

$\ln x = \log_e x$ naturlig log.

I DMAT $\log x = \log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$

Halvering af mængde



Antal halvering: $3 = \lceil \log 5 \rceil$

2.4

En følge (af tal) $a_0, a_1, a_2, \dots\dots$

F. eks: $5, 8, 11, 14, 17, \dots$

DEF: En følge af tal er en funktion

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

$a(n)$ skrives a_n

Eksempel Fibonacci tal $f_0, f_1, f_2, \dots$

defineres ved $f_0 = 0$, $f_1 = 1$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad \text{for } n \geq 2$$

$f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$,

$f_6 = 8$, ...

EKS $\quad a_n = n!$ fakultet defines ved

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n-1)! \qquad \text{for } n \geq 1$$

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, ...

SUM

Følge $\quad a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_n$

F. eks. $\quad a_{-1}, a_0, a_1, a_2$

DEF $\quad \sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$, hvis $m \leq n$

EKS $\quad \sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

EKS

$$S = \sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$\begin{aligned} 2S = S + S = \quad & 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \; + \\ & n + (n-1) + \quad\quad + 2 + 1 = \\ & (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1) \end{aligned}$$

Altså $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$

EKS Lad $a, r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, $r \neq 1$

Så er $\sum_{j=0}^{n} a \cdot r^j = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$

Bevis

Sæt $S_n = \sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n$

Så er $rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n+1}$

og $S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$

$$(1-r)S_n = a - ar^{n+1}$$

$$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$$

$\square$

<u>2.2</u> A, B : mängder

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Komplementærmængde af A i grundmængde U

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

$$= \{x \in U \mid \neg(x \in A)\}$$

De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

<u>Bevis</u>:

$$\overline{A \cup B} = \{x \in U \mid \neg(x \in A \cup B)\}$$

$$= \{x \in U \mid \neg(x \in A \lor x \in B)\}$$

$$= \{x \in U \mid \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}\}$$

$$= \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \square$$

Medlemstabel

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

ENS

DVS $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Mængder $A_1, A_2, A_3, \ldots$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \{x \mid \forall i \in \mathbb{Z}^+ (x \in A_i)\}$$

$\mathrm{span}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ = fællesmængde af alle underrum, der indeholder $\vec{u}$ og $\vec{v}$.