3.2 Store O-notation

Definition.
Lad f og g være funktioner, $f, g : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$ eller $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
Så siges $f(x)$ at være $O(g(x))$ hvis der findes konstanter C og k (kaldes vidner) sådan at

$$|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|, \quad \text{for alle} \quad x > k.$$

(Vi kan godt slække kravet om at $f(x)$ og $g(x)$ er defineret for alle hele/reelle tal x. Det er nok at de er defineret for $x > k$.)

$f(x)$ vokser ikke hurtigere end $g(x)$.

EKS $f(x) = x^2 + 5x + 3$, $g(x) = x^2$

Vise at $f(x)$ er $O(g(x))$

Når $x > 0$ så er $f(x) > 0$ og $g(x) > 0$

og $|f(x)| = f(x) = x^2 + 5x + 3$

Når $x > 1$ så er $x^2 > x$ og $x^2 > 1$

og $f(x) = x^2 + 5x + 3 \leq x^2 + 5x^2 + 3x^2 = 9x^2 = 9 \cdot g(x)$

Altså $|f(x)| \leq 9 \cdot |g(x)|$ for alle $x > 1$

Vidner: $C = 9$, $k = 1$

Så $f(x)$ er $O(g(x))$

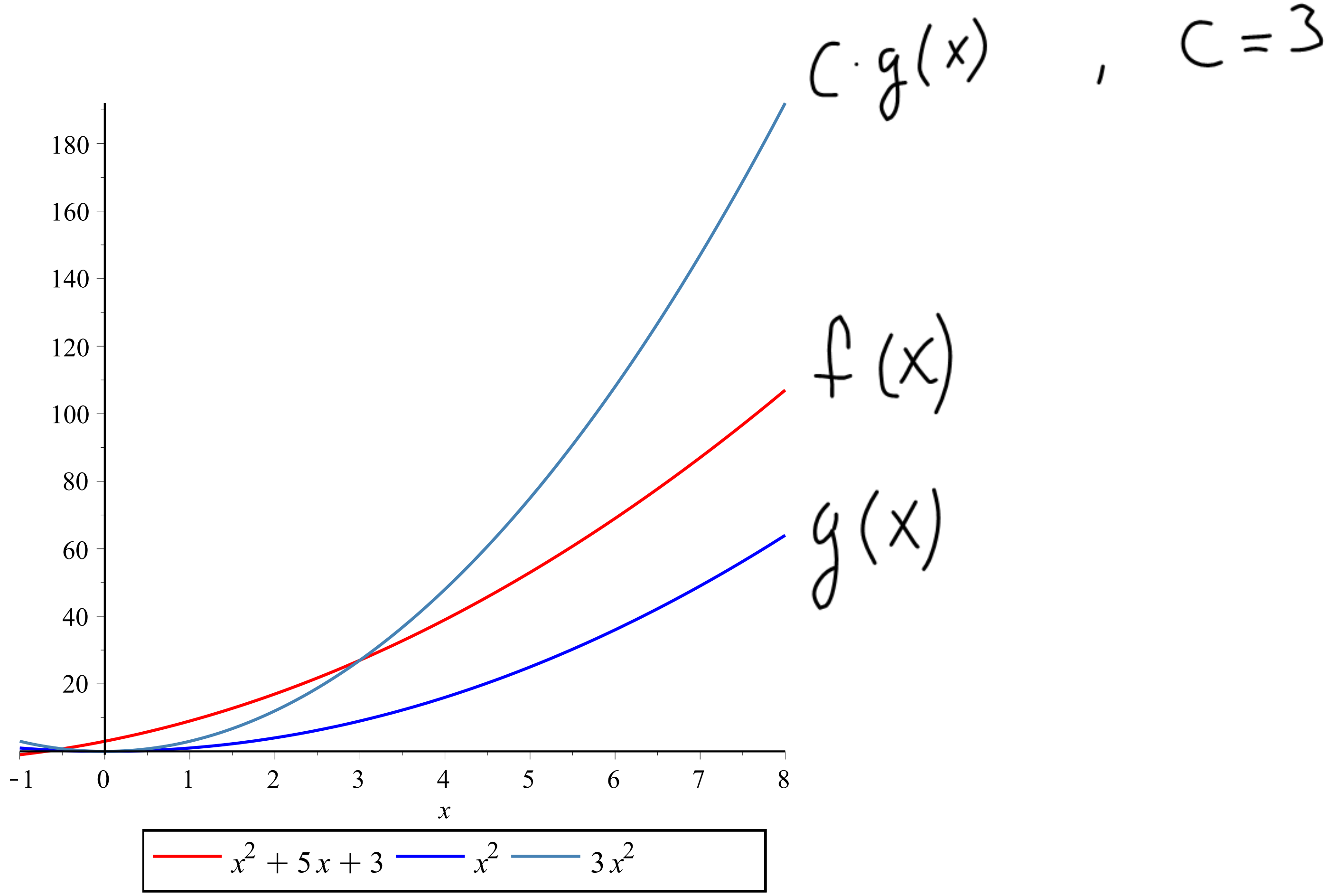
Alternativ:

Hvis $x > 5$ så er $x^2 > 5x$ og $x^2 > 3$

og $f(x) = x^2 + 5x + 3 \leq x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2 = 3 \cdot g(x)$

$$|f(x)| \leq 3 \cdot |g(x)| \text{ for alle } x > 5$$

Vidner $C = 3$, $k = 5$


$C \cdot g(x)$, $C = 3$
$f(x)$
$g(x)$
180
160
140
120
100
80
60
40
20
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x
$x^2 + 5x + 3$
x^2
$3x^2$

EKS $\quad f(x) = x^2 \,, \quad g(x) = x^2 + 5x + 3$

Vise $f(x)$ er $O(g(x))$

Når $x > 0$ er

$$|f(x)| = f(x) = x^2 \leq x^2 + 5x + 3 = g(x) = |g(x)|$$

Vidner: $C = 1, \; k = 0$

EKS $\quad f(x) = x + 7 \,, \quad g(x) = x^3$

Vise: $f(x)$ er $O(g(x))$

Hvis $x > 0$ så er $f(x) > 0$ og $g(x) > 0$

$$|f(x)| = f(x) = x+7$$

Hvis $x > 7$ så er

$$|f(x)| = x+7 \leq x+x = 2x \leq 2x^3 = 2g(x)$$
$$= 2|g(x)|$$

Vidner: $C = 2$, $k = 7$

$x+7$ er $O(x^3)$

EKS $f(x) = x^3$ og $g(x) = x+7$

Vise: $f(x)$ er ikke $O(g(x))$

Bevis ved modstrid

Antag der findes tal C, k så

$$|f(x)| \leq C|g(x)| \text{ for alle } x > k$$

Sæt $k' = \max\{k, 7\}$

Så er $|f(x)| = f(x) \leq C\,g(x) = C \cdot |g(x)|$ for alle $x > k' \geq k$

Altså $x^3 \leq C \cdot (x+7)$ for alle $x \geq k'$

$$x^3 \le C \cdot (x+7) \le C \cdot (x+x) = 2C \cdot x \quad \text{for alle } x > k' \ge 7$$

Divider med x

$$x^2 \le 2C \quad \text{for alle } x > k'$$

Modstrid.

Altså C og k eksisterer ikke. $\square$

Definition

f, g funktion.

$f(x)$ siges at være $\Omega(g(x))$ hvis

der findes konstanter $C > 0$, k så

$$|f(x)| \geq C|g(x)| \quad \text{for alle } x > k$$

$f(x)$ vokser mindst lige så hurtigt som $g(x)$

$$|g(x)| \leq \frac{1}{C}|f(x)|$$

Altså $g(x)$ er $O(f(x))$

Hvis $f(x)$ er $O(g(x))$ og

$f(x)$ er $\Omega(g(x))$

så siger at $f(x)$ er $\Theta(g(x))$

Eks x^2+5x+3 er $\Theta(x^2)$

3.1: Algoritmer

Definition 1. En algoritme er en endelig følge af præcise instruktioner til at udføre en beregning eller løse et problem.

Yderligere egenskaber for en algoritme:
input, output, præcis defineret, korrekt, endelig, hver skridt kan udføres på endelig tid, generel

Algoritme=Procedure

procedure *linear search*(x:heltal, $a_1, \ldots, a_n$: forskellige heltal)
$i := 1$
while $\underline{i \leq n}$ and $\underline{x \neq a_i}$
    $i := i + 1$
if $i \leq n$ **then** $location := i$
else $location := 0$
return $location$
{ hvis $location = 0$ så er x ikke i listen, ellers er $a_{location} = x$ }

$n=5$

7, 4, 5, 1, 6   Find $x = 1$

~~$i=1$~~   ~~$i=2$~~   ~~$i=3$~~ $i=4$ i

Algoritme 3: Binær søgning — Side 197

procedure *binary search*(x: heltal, $a_1, \ldots, a_n$: voksende følge af heltal)

$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$

i j

$i := 1$

$j := n$

while $i < j$

begin

    $m := \lfloor (i+j)/2 \rfloor$

    if $x > a_m$ **then** $i := m + 1$

    else $j := m$

end

if $x = a_i$ **then** $location := i$

else $location := 0$

return $location$

$\{$ hvis $location = 0$ så er x ikke i listen, ellers er $a_{location} = x$ $\}$

$n = 7$

Find $x = 8$

1	4	5	6	8	9	10
~~$i=1$~~			$m=4$	$i=5$	~~$m=6$~~	~~$j=7$~~
				$m=5$	~~$j=6$~~	
				$j=5$		

location $= 5$

procedure $bubblesort(a_1, \ldots, a_n$: reelle tal med $n \geq 2)$
for $i := 1$ **to** $n - 1$
    for $j := 1$ **to** $n - i$
        if $a_j > a_{j+1}$ **then** ombyt a_j og a_{j+1}
$\{ a_1, \ldots, a_n$ er nu i voksende rækkefølge$\}$

		$i=1$, $j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$i=2$, $j=1$	$j=2$	$j=3$	$i=3$, $j=1$	$j=2$	$i=4$, $j=1$
a_1	7	4	4	4	4		4		1		
a_2	4	7	5	5	5		1		4		
a_3	5	5	7	1	1		5		5		
a_4	1	1	1	7	6		6		6		
a_5	6	6	6	6	7		7		7		

procedure $change(c_1, \ldots, c_r, n$: positive hele tal)
{der skal udbetales n cents ved hjælp møntværdier $c_1 > c_2 > \ldots > c_r$}
for $i := 1$ **to** r
    $d_i := 0$ {antal mønter med værdi c_i}
    while $n \geq c_i$
        $d_i := d_i + 1$
        $n := n - c_i$

{d_i er antal mønter med værdi c_i, der skal udbetales.}

$c_1 = 25$ $c_2 = 10$ $c_3 = 5$ $c_4 = 1$

$n = 87$

$i = 1$

$d_1 = 0$

$d_1 = 1, \quad n = 87 - 25 = 62$

$d_1 = 2, \quad n = 62 - 25 = 37$

$d_1 = 3, \quad n = 37 - 25 = 12$

$i = 2$

$d_2 = 0$

$d_2 = 1, \quad n = 12 - 10 = 2$

$i = 3$

$d_3 = 0$

$i = 4$

$d_4 = 0$

$d_4 = 1, n = 1$

$d_4 = 2, n = 0$