Miniprojekt 1: fredag den 21. marts.

Teorien fra miniprojekter indgår i eksamenspensum.
Ingen afkrydsning.

I miniprojekt 1 (og 2 + 4) benyttes Maple.
Installér Maple inden fredag.

5.1: Induktionsbeviser.

Lad $P(n)$ være et åbent udsagn, hvor n antager værdier i $\mathbb{Z}^+$.

Induktionsprincippet:

For at bevise at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$ skal vi:

Basisskridt: bevise at $P(1)$ er sand.

Induktionsskridt: bevise at der for ethvert $k \geq 1$ gælder: hvis $P(k)$ er sand så er $P(k+1)$ også sand.

$P(1)$ sand

$P(1) \to P(2)$ altså $P(2)$ sand

$P(2) \to P(3)$ altså $P(3)$ sand

EKS 1

Lad $P(n)$ betegner udsagnet

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Så er $P(n)$ sand for alle $n \geq 1$.

Bevis ved induktion

Basisskridt (vise at $P(1)$ sand)

$P(1)$ er ligningen

$$1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

$P(1)$ er altså sand.

Induktionsskridt

Lad $k \geq 1$ og antag at $P(k)$ er Sand

altså $1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

(Dette kaldes induktionsantagelsen, IH)

Vise $P(k+1)$ Sand

$$1+2+3+\dots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$$

VS: $1+2+3+\dots+(k+1) = (1+2+3+\dots+k)+(k+1) \overset{IH}{=}$

$\frac{k(k+1)}{2} + k+1$ ifølge antagelsen

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

$$HS = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2+2k+k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2}$$

Altså $VS = HS$ og dermed er $P(k+1)$ sand.
Induktionsskridtet er vist.

$P(n)$ er altså sand for alle $n \geq 1$. $\square$

EKS 2

Udregn $1+3+5+\dots+(2n-1)$

de første n ulige tal

$n=1$: $1 = 1^2$

$n=2$: $1+3 = 4 = 2^2$

$n=3$: $1+3+5 = 9 = 3^2$

$n=4$: $1+3+5+7 = 16 = 4^2$

Lad $P(n)$ betegne ligningen

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

Vise $P(n)$ Sand for alle $n \geq 1$

<u>Bevis</u> ved induktion

<u>Basisskridt</u> Vise $P(1)$ er Sand. Se ovenfor.

<u>Induktionsskridt</u>

Lad $k \geq 1$ og antag $P(k)$ er Sand,

altså $1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2$

Vise $P(k+1)$ Sand, altså

$$1+3+5+\ldots+(2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

$$1+3+5+\dots+(2(k+1)-1) =$$

$$\underbrace{1+3+5+\dots+(2k-1)}+(2k+1) \overset{IH}{=} k^2+2k+1$$

$$=(k+1)^2$$

$P(k+1)$ er altså sand.

$P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$. $\square$

Sætning

Hvis $n \geq 0$ så går 3 op i $n^3 - n$.

Bevis ved induktion

Basisskridt: $(n=0)$

3 går op i $0^3 - 0 = 0$

Induktionsskridt:

Lad $k \geq 0$ og antag 3 går op i $k^3 - k$.

Vise at 3 går op i $(k+1)^3 - (k+1)$

$$(k+1)^3 - (k+1) = (k+1)(k+1)^2 - (k+1) =$$

$$(k+1)(k^2+2k+1) - (k+1) = k^3+2k^2+k+k^2+2k+1-(k+1)$$

$$= (k^3+3k^2+3k+\underline{1}) - (k+\underline{1}) =$$

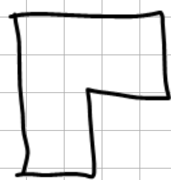
$$(k^3-k) + 3k^2+3k$$

3 går op i hvert led (ifølge antagelse)

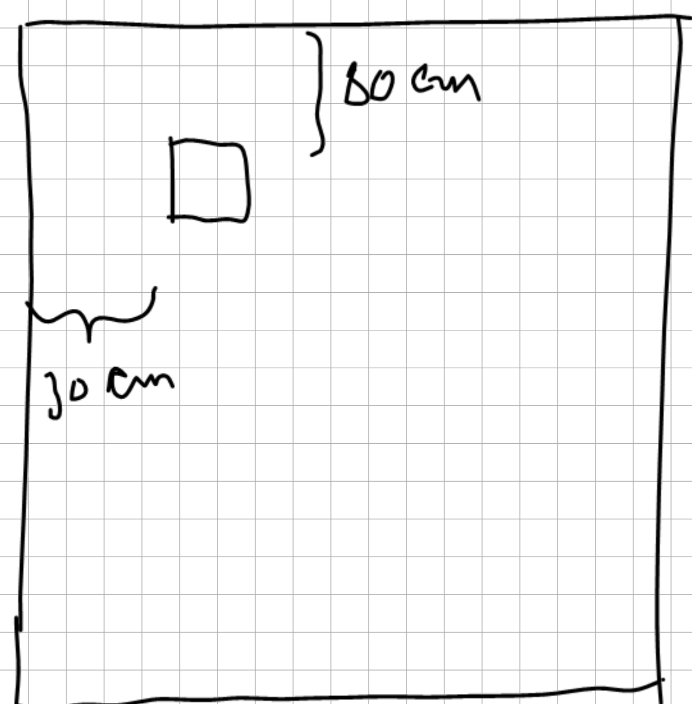
3 går op i summen $(k+1)^3-(k+1)$.

Altså 3 går op i n^3-n for alle $n \geq 0$. $\square$

Gulv: 3,20 m x 3,20 m

Fliser  Term = 5 cm

Afløbsrist 10 cm x 10 cm

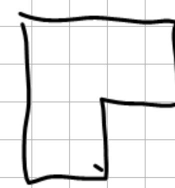


Er dette muligt?

Ja.

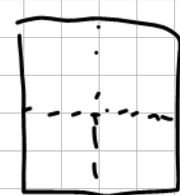
$n = 5$ i nedenstående

Sætning

Et $2^n \times 2^n$ skakbræt med ét markeret felt kan dækkes af fliser med form 

hver felt er dækket af 1 flise undtagen markeret felt som ikke er dækket.

Bevis med induktion

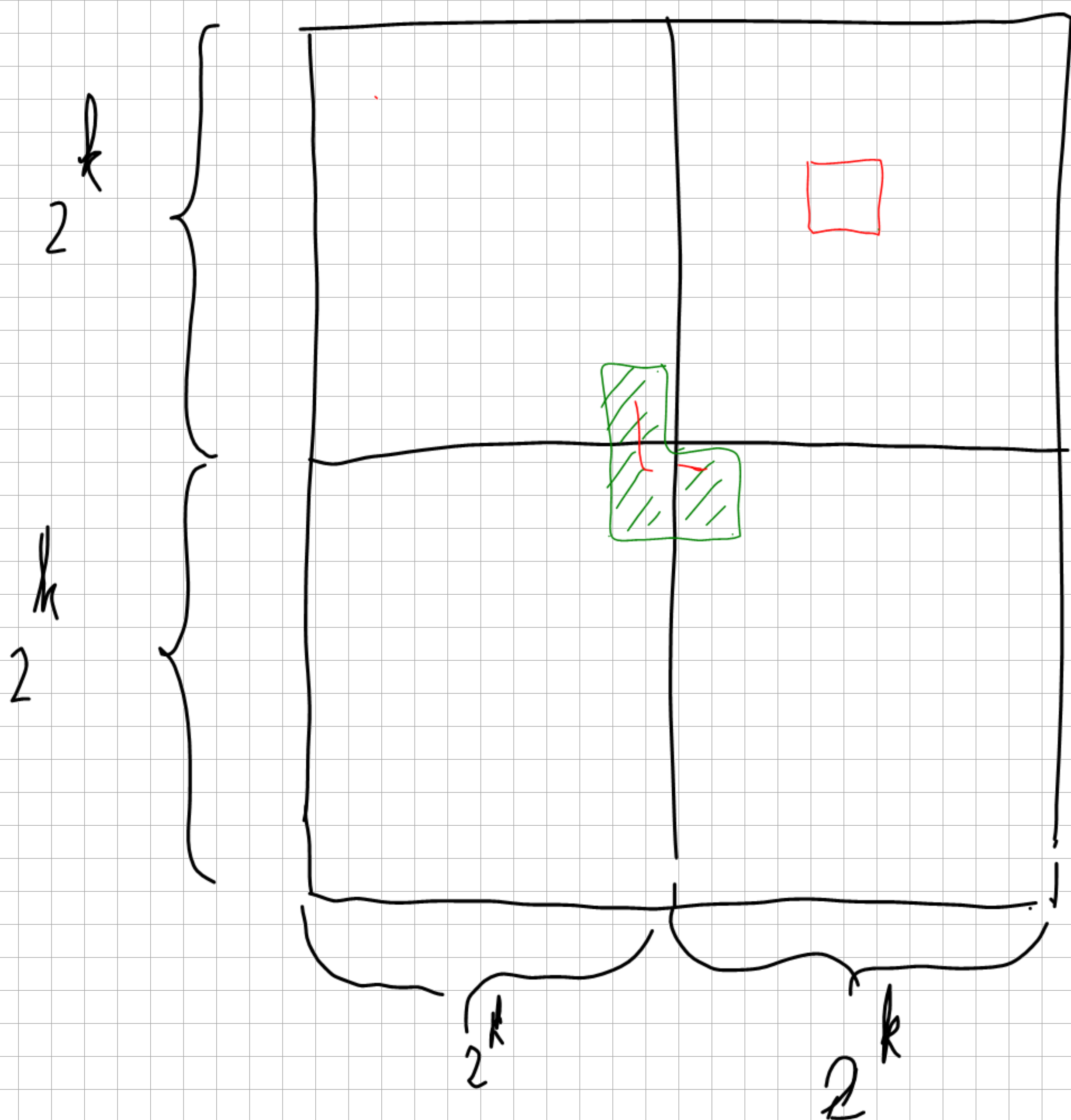
Basisskridt $(n=1)$  OK

Induktionsskridt

Lad $k \geq 1$ og antag påstanden er sand for $n=k$

Vise: Sand for $n = k+1$

Betragt et $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ skakbræt.



markeret felt

Læg en flise i midten

Ifølge induktionsantagelse kan hver af de 4 dele dækkes (undtagen rød/grøn)

5.2: Velordningsprincippet.

Lad S være en *ikke-tom* mængde af ikke-negative hele tal.
Så har S et mindste element, altså et element $m \in S$ så $s \geq m$ for alle $s \in S$.

Anvendelse: velordningsprincippet kan bruges i stedet for induktionsprincippet.

Vi skal bevise at udsagnet $P(n)$ er sand for alle $n \geq 0$.
Lad $S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ er falsk}\}$.
Skal vise: $S = \emptyset$.
Bevis ved modstrid: antag $S \neq \emptyset$ og lad $m \in S$ være det mindste element.
Vis først at $m \neq 0$, altså $m > 0$. Dermed er $P(m-1)$ sand.
Vis at hvis $P(m-1)$ er sand så er $P(m)$ også sand.

Sætning

Lad $a \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}^+$

Så findes der $q, r \in \mathbb{Z}$ så

$$a = q \cdot d + r \quad \text{og} \quad 0 \leq r < d.$$

Bevis

Lad S være mængde ikke-negative tal på formen $a - qd$, $q \in \mathbb{Z}$

Hvis $a \geq 0$ så $a = a - 0 \cdot d \in S$

Hvis $a < 0$ så er $a - ad = -a(d-1) \geq 0$

da $-a \geq 0$ og $d - 1 \geq 0$

I begge tilfælde er $S \neq \emptyset$

Lad r være det mindste tal i S.

Der findes $q \in \mathbb{Z}$ så $r = a - qd$, $r \geq 0$

$$\Updownarrow$$

$$a = qd + r$$

Hvis $r \geq d$ så er $r - d = a - qd - d = a - (q+1)d \geq 0$

Altså $r - d \in S$. Modstrid med at r er mindst.

Allkä $r < d$.

$\square$