5.2

## ~~4.2~~: Stærk induktion.

Lad $P(n)$ betegne et udsagn, hvor $n \in \mathbb{Z}$.

**Induktionsprincippet:** For at bevise at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$ skal vi

Basisskridt: bevise at $P(1)$ er sand.

Induktionsskridt: bevise at der for ethvert $k \geq 1$ gælder: hvis $P(1), \ldots, P(k)$ alle er sande så er $P(k+1)$ også sand.

Man kan eventuelt ændre alle blå 1-taller til et andet tal $b$. Det røde 1-tal må ikke ændres.

EKS

$P(n)$ : vi kan sette $n$ cents på brev med 4-cents frimerker og 5-cents frimerker.

$P(9)$ Sand : $9 = 4+5$

$P(10)$ Sand : $10 = 5+5$

$P(11)$ Falsk

$P(12)$ Sand $12 = 4+4+4$

$P(13)$ Sand $13 = 4+4+5$

$P(14)$ Sand $14 = 4+5+5$

$P(15)$ Sand $15 = 5+5+5$

$P(n)$ er sand for alle $n \geq 12$.

Bevis ved stærk induktion

Basisskridt $(n=12)$ $P(12)$ Sand

og $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$ Sand, se ovenfor.

Induktionsskridt

Lad $k \geq 15$ og antag at $P(l)$ er sand
for alle heltal $l$ hvor $12 \leq l \leq k$.

Skal vise $P(k+1)$ Sand.

$k+1-4 = k-3 \geq 12$

Da $12 \leq k-3 \leq k$ kan vi sætte $k-3$
cents på brevet.

Sæt yderligere et 4-cents mærke på.

I alt: $k-3+4 = k+1$

$P(k+1)$ er altså sand.

Dermed er $P(n)$ sand for alle $n \geq 12$. $\square$

## 5 ~~4~~.3: Rekursivt definerede funktioner (følger).

For at definere en uendelig følge

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

$a_0 \quad a_1 \quad a_2, \ldots$

skal vi

Basisskridt: angive en værdi for $f(0)$

Rekursionsskridt: for ethvert $n \geq 0$ angive hvordan man bestemmer $f(n+1)$ fra $f(0), \ldots, f(n)$.

Man kan eventuelt ændre alle blå 0'er til et andet tal $b$.

EKS $n!$ defineres rekursivt ved

Basisskritt: $0! = 1$

Rekursjonsskritt: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

for alle $n \geq 0$

$0! = 1$ , $1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 = 2$

Fibonaccitallene $f_0, f_1, f_2, \ldots$ defines rekusivt ved

Basisskridt:

$f_0 = 0$

$f_1 = 1$

Rekursionsskridt:

for $n \geq 2$ er $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ så är $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1$$

$$\alpha \approx 1,618$$

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \approx 2,618$$

**Sætning.** For $n \geq 3$ er

$$f_n > \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} = \alpha^{n-2}$$

Bevis ved stærk induktion

Basisskridt $(n=3)$ $\quad f_3 = 2 > \alpha = \alpha^{3-2}$ OK

$(n=4)$ $\quad f_4 = 3 > \alpha^2 = \alpha^{4-2}$ OK

## Induktionsskridt

Lad $k \geq 4$ og antag $f_l > \alpha^{l-2}$

for alle heltal $l$ hvor $3 \leq l \leq k$.

Skal vise $f_{k+1} > \alpha^{k+1-2} = \alpha^{k-1}$

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$$

$$> \alpha^{k-2} + \alpha^{k-1-2}$$

ifølge induktionsantagelsen

da $3 \leq k-1 \leq k$

$3 \leq k \leq k$

$$= \alpha^{k-2} + \alpha^{k-3} = \alpha \cdot \alpha^{k-3} + \alpha^{k-3} = (\alpha+1)\,\alpha^{k-3}$$

$$= \alpha^2 \cdot \alpha^{k-3} = \alpha^{k-1}$$

Induktionsskridtet er altså gennemført

Dermed er $f_n > \alpha^{n-2}$ for alle $n \geq 3$.

Eks

$$\gcd(f_8, f_7) = \gcd(21, 13)$$

Euklid:

$$21 = 1 \cdot 13 + 8 \qquad 8 = f_6$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5 \qquad 5 = f_5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3 \qquad 3 = f_4$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2 \qquad 2 = f_3$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1 \qquad 1 = f_2$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

$$\gcd(21, 13) = 1$$

$\gcd(f_{n+1}, f_n)$ krever $n-1$ divisjoner.

$\gcd(a, b)$ hvor $a > b$, $b \leq f_n$ krever

høyst $n-1$ divisjoner.

**Sætning.** Ved beregning af gcd$(a,b)$, hvor $a > b$, ved hjælp af Euklids algoritme er antallet af divisioner, der skal bruges, højst 5 gange antal decimale cifre i $b$.

Bevis

$b$ har $n$ cifre: $10^{n-1} \le b < 10^n$

$\alpha = 1{,}618$, $\log_{10} \alpha = 0{,}209$, $5 \log_{10} \alpha > 1$

$$n-1 \le \log_{10} b < n < 5n \log_{10} \alpha = \log_{10} \alpha^{5n}$$

$$\le \log_{10} f_{5n+2}$$

Maple

$$\log_{10} b < \log_{10} f_{5n+2}$$

$$b < f_{5n+2}$$

$\gcd(a,b)$ kræver færre divisioner

end $\gcd(f_{5n+3}, f_{5n+2})$, som

kræver $5n+2-1 = 5n+1$

$\gcd(a,b)$ bruger højst $5n$ divisioner.

$\square$

**Rekursivt definerede mængder.**

For at definere en mængde $S$ rekursivt skal vi

Basisskridt: angive et eller flere elementer, der tilhører $S$

Rekursionsskridt: angive en eller flere regler, der hver ud fra et eller flere elementer i $S$ konstruerer et nyt element i $S$.

EKS $S \subseteq \mathbb{Z}$ defineres rekursivt ved

Basisskridt: $0 \in S$

Rekursjonsskritt: hvis $n \in S$ så $n+4 \in S$ og $n+5 \in S$.

$$S = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, 14, \dots\}$$

Lad $\Sigma$ være et alfabet (en endelig mængde af symboler.)

Mængden af strenge over $\Sigma$ betegnes $\Sigma^*$ og defineres rekursivt ved

Basisskridt: $\lambda \in \Sigma^*$, hvor $\lambda$ (lambda) betegner den tomme streng.

Rekursionsskridt: Hvis $\underline{w} \in \Sigma^*$ og $\underline{x} \in \Sigma$, så er $\underline{wx} \in \Sigma^*$.

EKS Bitstrenge. $\Sigma = \{0,1\}$

$\lambda \in \Sigma^*$

Da $\lambda \in \Sigma^*$ er $\lambda 0 = 0 \in \Sigma^*$, $\lambda 1 = 1 \in \Sigma^*$

Da $0 \in \Sigma^*$ er $00 \in \Sigma^*$, $01 \in \Sigma^*$

Da $1 \in \Sigma^*$ er $10 \in \Sigma^*$, $11 \in \Sigma^*$

$\vdots$

Længden af en streng defineres ved

Basisskridt: $l(\lambda) = 0$

Rekursionsskridt: $l(wx) = l(w) + 1$

hvor $w \in \Sigma^*$, $x \in \Sigma$

EKS

$$l(011) = l(01) + 1 = l(0) + 1 + 1 = l(\lambda) + 1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 1 + 1 = 3$$

Konkatenering af strenge $w_1$ og $w_2$, skrives $w_1 \cdot w_2$ defineres ved:

Basisskridt: $w_1 \cdot \lambda = w_1$ hvor $w_1 \in \Sigma^*$

Rekursionsskridt: Hvis $w_1 \in \Sigma^*$ og $w_2 = wx$ hvor $w \in \Sigma^*$ og $x \in \Sigma$

så er $w_1 \cdot w_2 = (w_1 \cdot w)x$

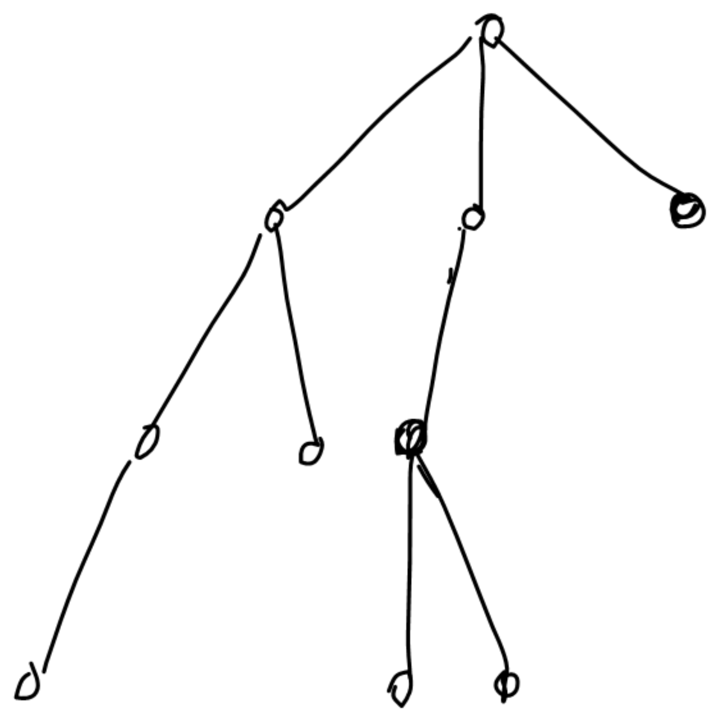
$$w_1 \cdot (wx) = (w_1 \cdot w)x.$$

<u>EKS</u>

$$010 \cdot 01 = (010 \cdot 0)1 = (010 \cdot \lambda 0)1 =$$

$$((010 \cdot \lambda)0)1 = ((010)0)1 = (0100)1 = 01001$$

# Træer med rod

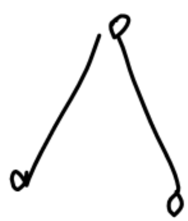


Et fuldt binært træ defineres rekursivt ved

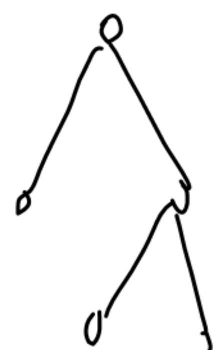
**Basisskridt** Et punkt $r$ udgør et fuldt binært træ.

**Rekursionsskridt** Hvis $T_1$ og $T_2$ er fulde binære træer så $T_1 \cdot T_2$ et fuldt træ med ny rod $r$ og venstre undertræ $T_1$ og højre undertræ $T_2$

$T_1$



$T_2$



$T_1 \cdot T_2$