5.5

while *condition*
    statement(s)

En **invariant** for while-løkken er et udsagn P som opfylder:
Hvis *condition* er sand og P er sand før udførelsen af *statement(s)* så er P også sand efter udførelsen af *statement(s)*.

Hvis P er sand før første iteration af while-løkken så er P altså altid sand; specielt er P sand efter sidste iteration af while-løkken.

$i := 1$

factorial $:= 1$

while $\underline{i < n}$

$\{$invariant: *factorial* $= i!$ og $i \leq n\}$

$i := i + 1$

factorial $:=$ *factorial* $\cdot\, i$

Antag factorial $= i!$ og $i \leq n$ før et gennemløb

$i_{ny} = i+1$

$\text{factorial}_{ny} = \text{factorial} \cdot i_{ny} = i! \cdot (i+1) = (i+1)!$

$= i_{ny}$!

Da $i < n$ er $i+1 = i_{ny} \leq n$

Påstanden er altså en invariant.

Hvis $n \geq 1$ så er invarianten sand før første gennemløb, da $1! = 1$

Dermed er invarianten sand efter sidste

gennemløb af while:

$$\text{factorial} = i! \quad \text{og} \quad i \leq n$$

og $\quad i < n \quad$ er falsk

$$i \leq n \quad \wedge \quad \neg(i < n) \implies i = n$$

$$\text{factorial} = i! = n!$$

```
procedure iterativ fibonacci (n: ikke-negativt heltal)
if n = 0 then return  0
else
    x := 0
    y := 1
    i := 1
    while i < n
        {invariant: y = f_i, x = f_{i-1} og i ≤ n}
        z := x + y
        x := y
        y := z
        i := i + 1
    return y
{y er det n'te Fibonacci tal.}
```

Antag $Y = f_i$, $x = f_{i-1}$, $i \leq n$

før et gennemløb af while

$$Z_{ny} = X + Y = f_i + f_{i-1} = f_{i+1}$$

$$X_{ny} = Y = f_i$$

$$Y_{ny} = Z_{ny} = f_{i+1}$$

$$i_{ny} = i + 1$$

$$Y_{ny} = f_{i_{ny}} \quad , \quad X_{ny} = f_{i_{ny}-1}$$

Da $i < n$ er $i_{ny} \leq n$

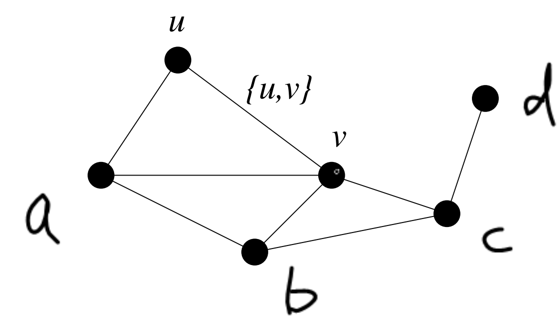
Invarianten er sand før 1. gennemløb af while og derfor sand efter sidste.

$y = f_i \quad , \quad i \leq n$

$i < n$ falsk

$i = n \quad , \quad y = f_i = f_n$

10.1



En graf består af punkter (også kaldes knuder, engelsk: vertices) og kanter. En kant forbinder to punkter. Kanten (ikke-orienteret), der forbinder punkterne u og v betegnes $\{u, v\}$.
Bemærk at $\{u, v\} = \{v, u\}$.
En sådan kant tegnes som kurve mellem u og v.

Formel **definition:** En (simpel), (ikke-orienteret) graf $G = (V, E)$ består af en (endelig) ikke-tom mængde V af elementer, der kaldes punkter og en mængde

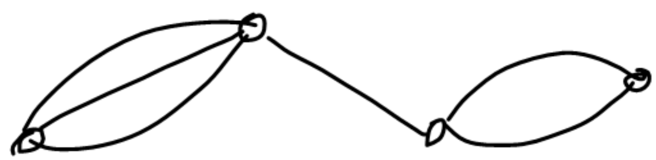
$$E \subseteq \{\ \{u, v\}\ \mid u, v \in V, u \neq v\}$$

hvis elementer kaldes kanter.

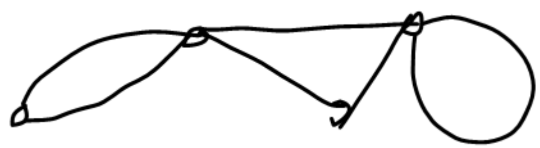
$V = \{a, b, c, d, u, v\}$, $E = \{\{u, a\}, \{u, v\}, \{a, v\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, v\}, \{v, c\}, \{c, d\}\}$

Varianter af ovennævnte **simple grafer**:

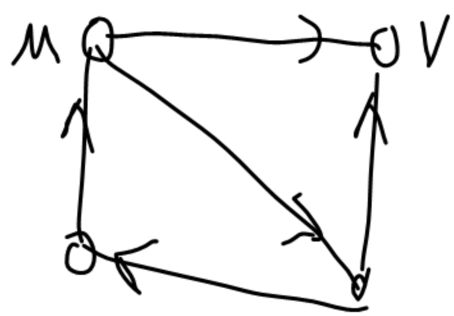
I en **multigraf** kan to punkter u og v være forbundet af flere kanter (multiple kanter).



I en **pseudograf** kan der være multiple kanter og desuden kan der være loops, altså der forbinder et punkt med sig selv.



I en **orienteret graf** (directed graph) har kanterne en retning, der angives med en pil.



EKS

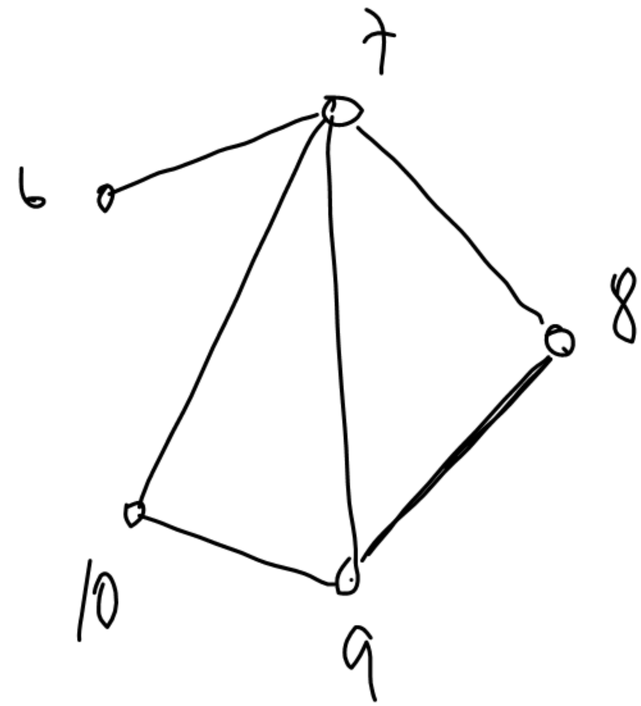
$$V = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$E = \{\{a, b\} \mid \gcd(a, b) = 1\}$$

$N(8) = \{7, 9\}$

$N(4) = \{7, 8, 10\}$

$\deg(9) = 3$



$G = (V, E)$

$$12 = 2|E| = \deg(6) + \deg(7) + \deg(8) + \deg(9) + \deg(10) = 1 + 4 + 2 + 3 + 2 = \underline{12}$$

10.2

Hvis $e = \{u, v\}$ er en kant i grafen G så siger vi

at e forbinder u og v,

at u og v er naboer og

at e er incident med u og e er incident med v

Mængden af naboer til v betegnes $N(v)$ (eller eventuelt $N_G(v)$.)

Graden (valensen) af punktet v, skrives deg(v), er antallet af kanter incidente med v.

I en simpel graf er deg(v) lig med antallet af punkter i $N(v)$.

Sætning 1

Lad $G = (V, E)$ være en graf. Så er

$$2|E| = \sum_{v \in V} \mathsf{deg}(v).$$

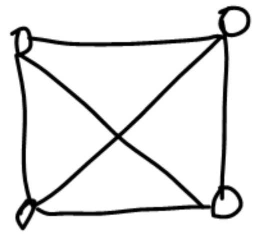
Hver kant bidrager med 2

Sætning 2

G har et lige antal punkter med ulige grad.

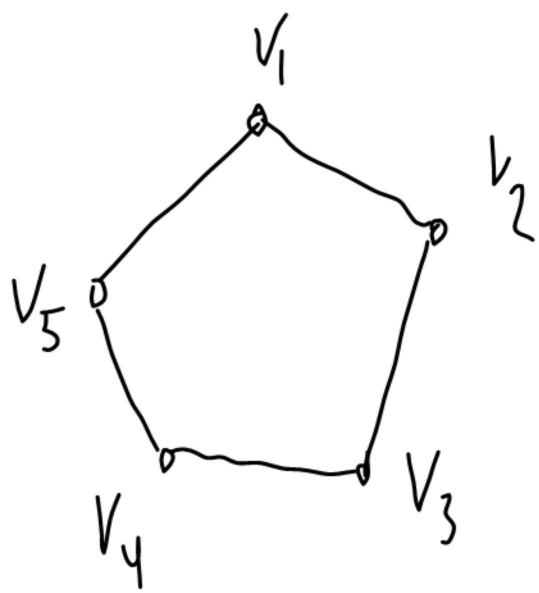
K_n betegner en **komplet graf** med n punkter, altså en simpel graf hvor der er en kant mellem ethvert par af forskellige punkter.

K_4

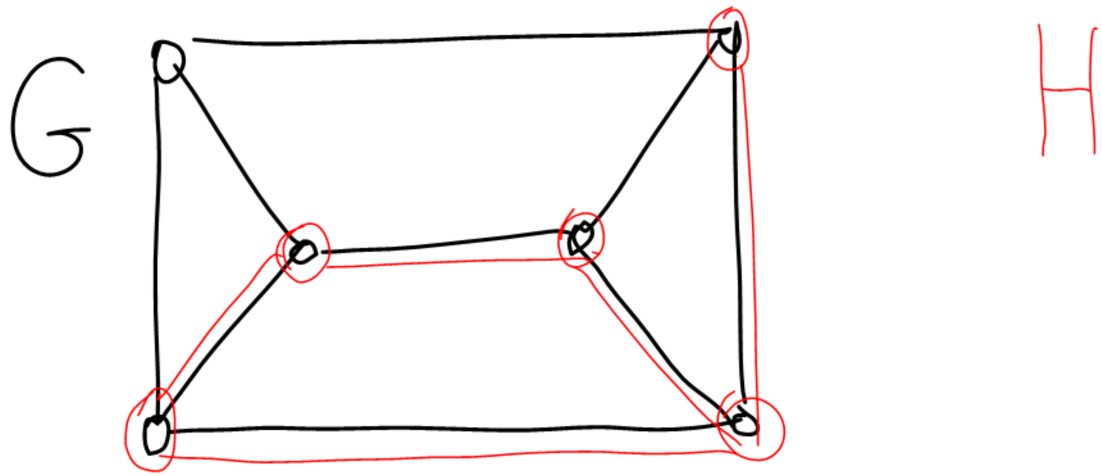


$C_n = (V, E)$ betegner en **kredsgraf** (cycle) med n punkter, hvor $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ og $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\}$.

C_5



Lad $G = (V, E)$ være en graf. Vi siger at $H = (W, F)$ er en **delgraf** af G hvis

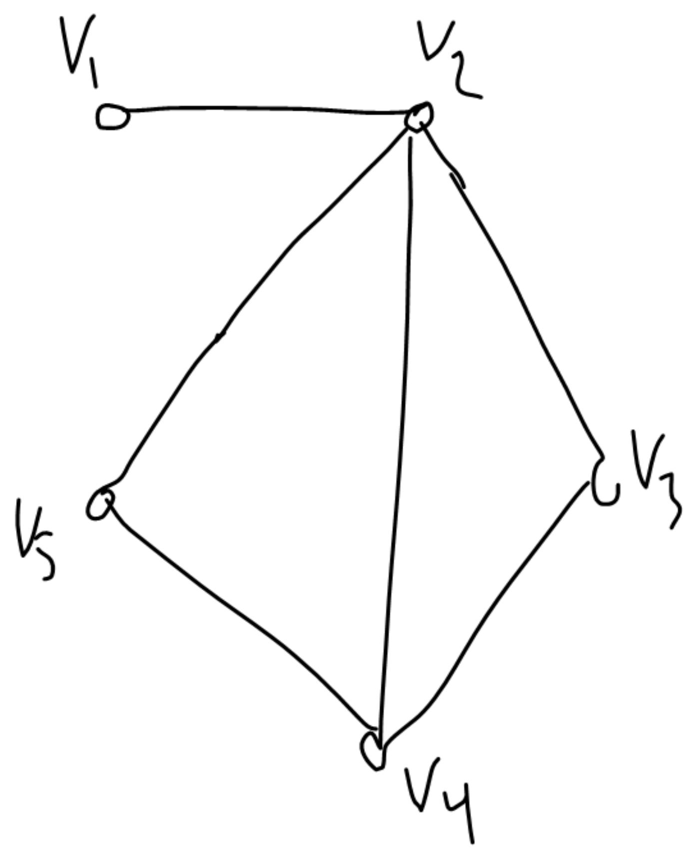


- H er en graf,
- $W \subseteq V$ og
- $F \subseteq E$.

At H er en graf betyder at hvis $\{u, v\} \in F$ så er $u \in W$ og $v \in W$.

10.3: Repræsentation af grafer.

Nabolisten for en graf består af en tabel hvor der for hvert punkt v er angivet hvilke punkter der er nabo til v.

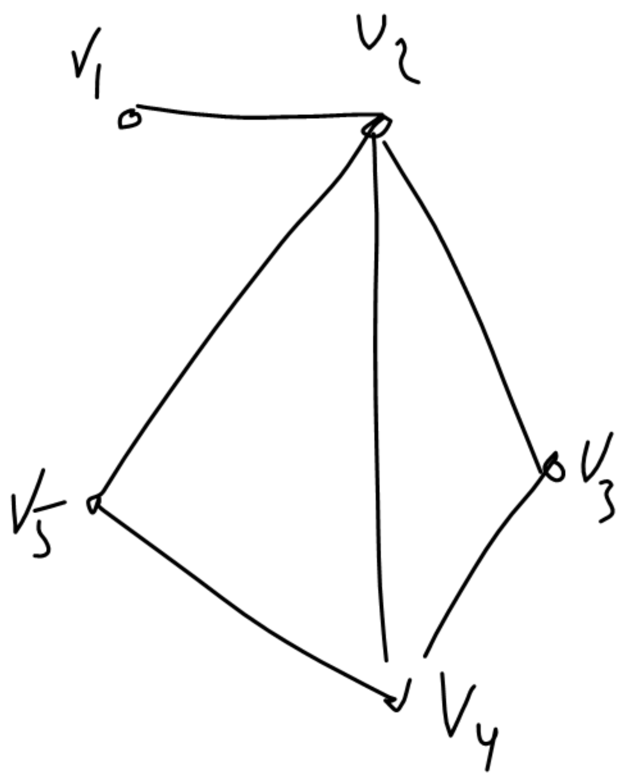


v	$N(v)$
v_1	v_2
v_2	v_1, v_3, v_4, v_5
v_3	v_2, v_4
v_4	v_2, v_3, v_5
v_5	v_2, v_4

Nabomatricen $A = A_G$ for en (simpel) graf $G = (V, E)$, hvor $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en $n \times n$ matrix hvor der på indgang (i, j) står:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis} \quad \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bemærk at A er en symmetrisk matrix.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10.4
Lad G være en (simpel) graf.
En **vej** (path) i G af længde n fra u til v er en følge

$$u = x_0, x_1, \ldots, x_n = v,$$

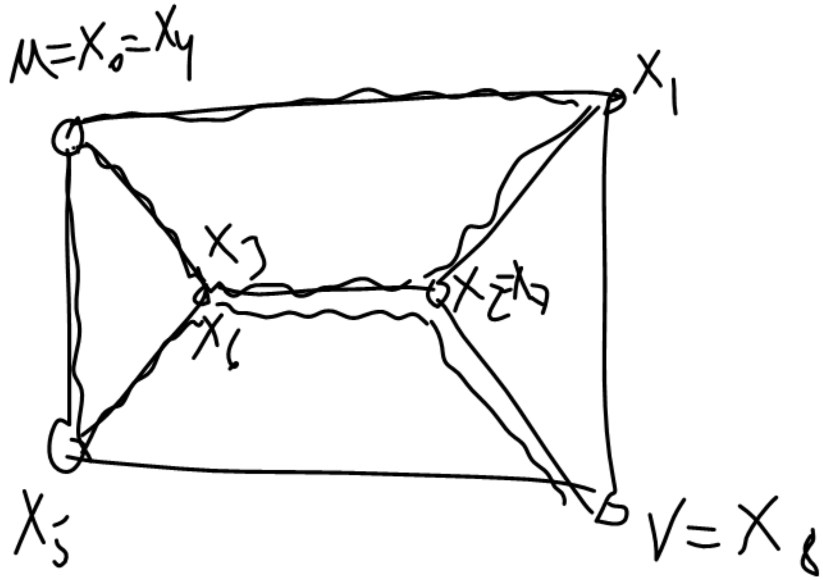
som opfylder at $\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}$ er kanter i G.

Længden n er antallet af kanter i vejen. (Dog sådan at en kant tælles med hver gang vejen går gennem denne kant.)

Hvis hver kant højst bruges én gang så siger vi at vejen er simpel.

Hvis $u = v$ og $n \geq 1$ så siger vi at vejen er en kreds (circuit).

I litteraturen stilles der ofte større krav til en vej/kreds.

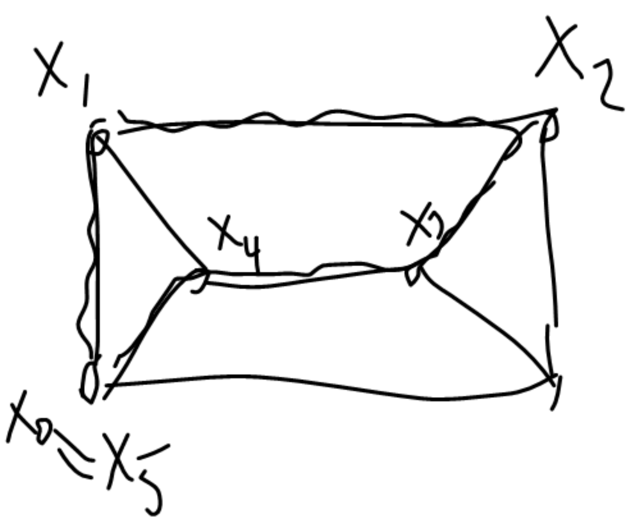


Vej

ikke simpel

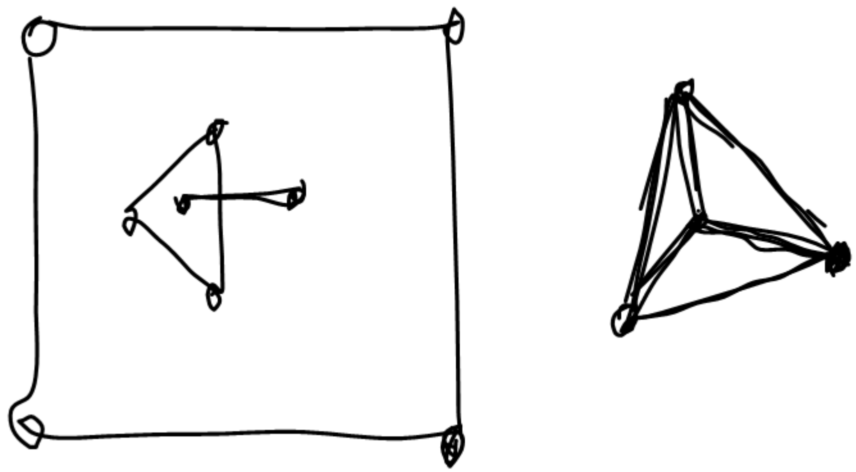
Simple vej

x_0, x_1, x_2, x_8



En graf $G = (V, E)$ siges at **sammenhængende** (connected) hvis der for ethvert par $u, v \in V$ findes en vej fra u til v i G.

En **sammenhængskomponent** i G er en maximal sammenhængende delgraf af G.
Altså en sammenhængende delgraf H af G der ikke er delgraf af nogen anden (større) sammenhængende delgraf af G.



4 sammenhængskomp.

K_2, K_3, C_4, K_4

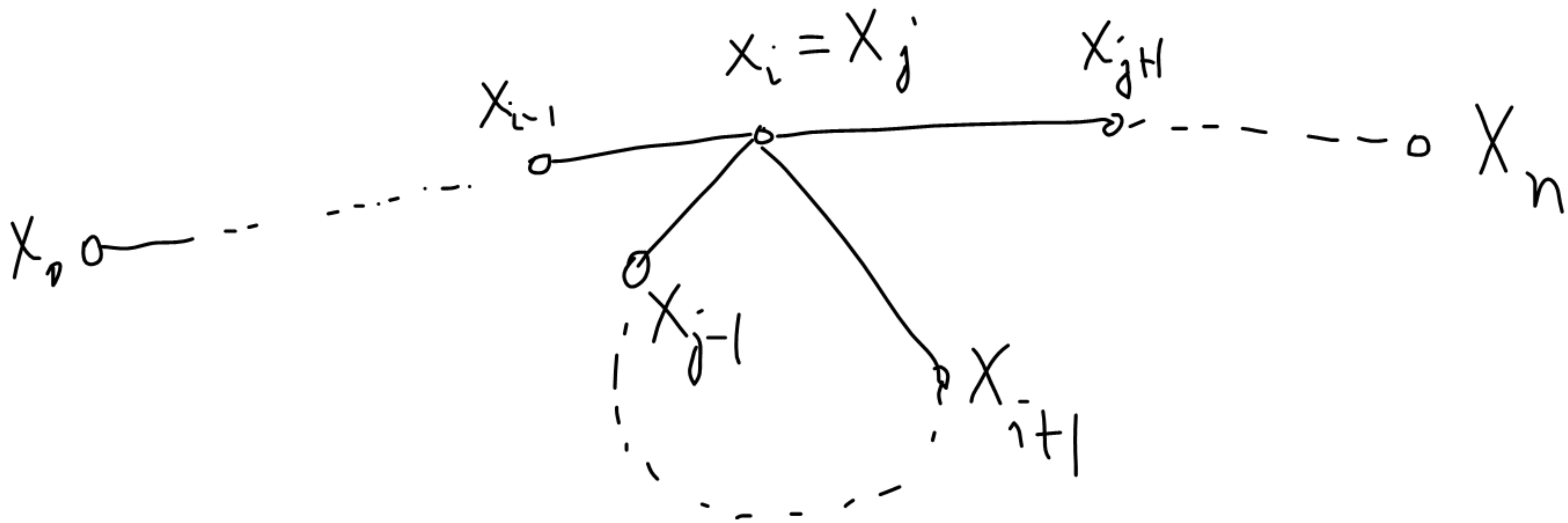
Sætning 1
Hvis G har en vej fra u til v
så har G også en simpel vej fra u til v.

Bevis

En kortest vej fra u til v:

$u = x_0, x_1, \dots x_n = v$

Hvis $x_i = x_j$, $i < j$



Så findes kortere vej $x_0, \dots, x_i, x_{j+1} \dots x_n$

Alle punkter på vejen er forskellige.

— kanter ——

Vejen er simpel.