10.6

En **vægtet graf** er en (ikke-orienteret, simpel) graf $G = (V, E)$ med en vægtfunktion

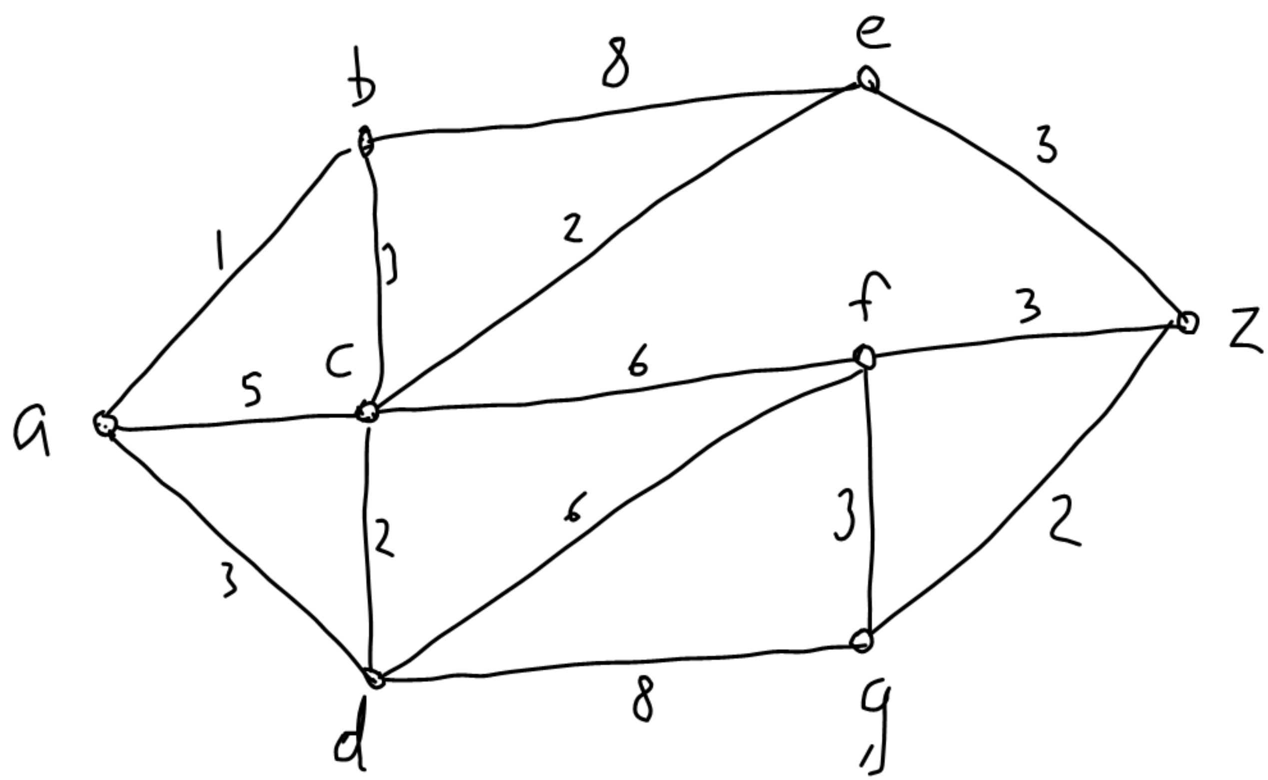
$$w : E \mapsto \mathbb{R}.$$

Vægten af en kant $e = \{u, v\}$ skrives også $w(e) = w(u, v)$.

Længden af en vej $e_1, e_2, \ldots, e_k$ i en vægtet graf er

$$w(e_1) + w(e_2) + \ldots + w(e_k).$$

Vi kan eventuelt kræve at $w(e) > 0$ for alle kanter $e \in E$ i en vægtet graf.



Vejen
a, b, e, z
har længde
1 + 8 + 3 = 12.

Efter x iterationer af while-løkken

x	u	L: a	b	c	d	e	f	g	z
0		0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

1	a
2	b
3	d
4	c
5	e
6	f
7	z

5

0	1	5	3	∞	∞	∞	∞
	1	4	3	9	∞	∞	∞
		4	3	9	9	11	∞
		4		6	9	11	∞
				6	9	11	9
					9	11	9
							9

$L(z) = 9$

Procedure Dijkstra($G = (V, E)$: vægtet sh. graf,
a, z: punkter)

$\{$ Det antages at $w(e) > 0$ for alle $e \in E\}$

For alle $v \in V$: $L(v) := \infty$

$L(a) := 0, \quad S := \emptyset$

while $z \notin S$

    $u :=$ punkt ikke i S, så $L(u)$ er mindst mulig

    $S := S \cup \{u\}$

    For alle v hvor $\{u, v\} \in E$ og $v \notin S$

        if $L(u) + w(u, v) < L(v)$ **then**

            $L(v) := L(u) + w(u, v)$

return $L(z)$.

$\{$En korteste vej fra a til z har længde $L(z)\}$

Invariant:

1. Hvis $v \in S$ så er $L(v)$ længden af en korteste vej fra a til v i G. Denne vej er indeholdt i S.

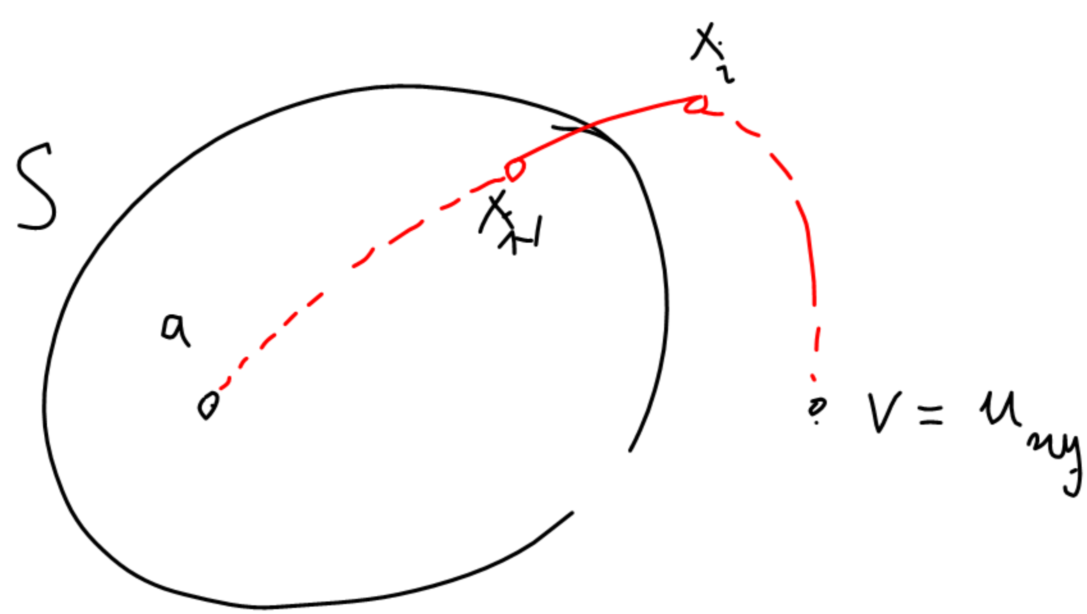
2. Hvis $v \notin S$ så er $L(v)$ længden af en korteste vej fra a til v, hvor alle vejens punkter er i $S \cup \{v\}$.

Punkterne tilføjes til S i rækkefølge bestemt ved voksende afstand fra a.

Antag $z \notin S$ og Invarianten er sand
før en iteration af while.

Efter iteration: u_{ny}, $S_{ny} = S \cup \{u_{ny}\}$, L_{ny}

1. Lad $v \in S_{ny}$. Kan $v = u_{ny}$, da 1. er sand for $v \in S$.



Antag at der findes a-v vej $a = x_0, x_1, \ldots x_k = v$
af længde $\leq L(v)$

Lad i være det mindste tal så $x_i \notin S$

Vejen $x_0, \ldots, x_i$ har længde $L(x_i)$ da 2 er
sand før iteration.

$$L(x_i) \geqslant L(u_{ny})$$

Vejen $x_i, \ldots, x_k$ har længde 0 hvis $i = k$
> 0 hvis $i < k$

Hele vejen $x_0, \ldots, x_k$ har længde $\geq L(u_{ny}) + 0$

Altså $x_0, \dots, x_k$ har længde $L(u_{ny})$

Derfor $i = k$ og vejen ligger i S_{ny}.

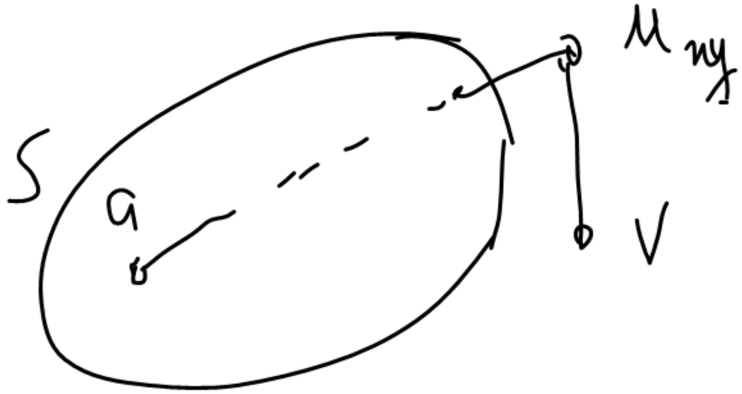
2. Lad $v \notin S_{ny}$.

En kortest a-v vej i $S_{ny} \cup \{v\} = S \cup \{u_{ny}, v\}$

er enten en kortest a-v vej i $S \cup \{v\}$ som

har længde $L(v)$ da 2. sand før iteration.

eller



Længde $L(u_{ny}) + w(u_{ny}, v)$

$L_{ny}(v)$ er det mindste af tallene

$L(v)$ og $L(u_{ny}) + w(u_{ny}, v)$

Invarianten er sand efter iterationen.

Invarianten er sand før 1. iteration

og dermed efter den sidste iteration (når $z \in S$)

$L(z)$ = længden af kortest $a-z$ vej.

Kompleksitet af Dijkstras algoritme:

Lad n være antallet af punkter i input-grafen.

Ved hvert gennemløb af while-løkken tilføjes et punkt til S.
While-løkken gennemløbes altså højst n gange.

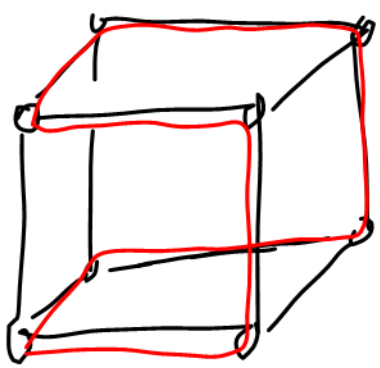
Ved hvert gennemløb:
Find i en liste med (højst) n punkter et punkt med mindst L-værdi: $O(n)$

Undersøg hver af u's højst n naboer: $O(n)$

Komplesitet af den samlede algoritme: $O(n^2)$

10.5

En **Hamilton-kreds** i en graf er en simpelkreds, der går gennem hver af grafens punkter én gang.



Den handelsrejsendes problem

Travelling Salesman Problem (TSP).

Lad G være en vægtet graf med en Hamilton-kreds.
F.eks. G er komplet graf (altså: en simpel graf med en kant mellem alle par af punkter).

Find en *kortest* Hamilton-kreds i G.

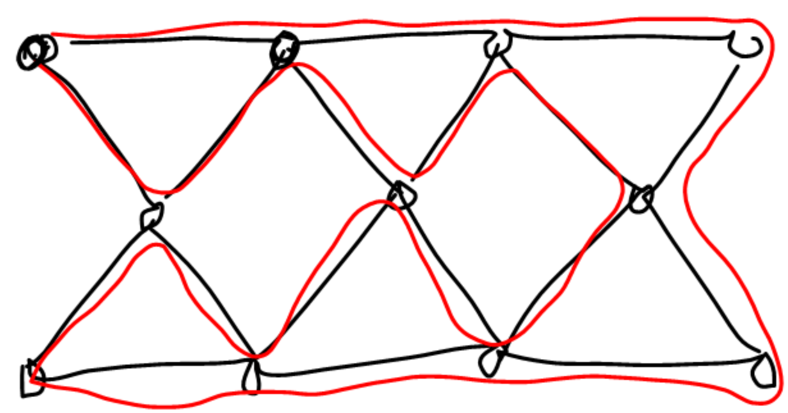
En **Euler-kreds** i en ikke-orienteret graf $G = (V, E)$ er en simpel kreds $e_1, \ldots, e_n$, som bruger alle kanter i G.

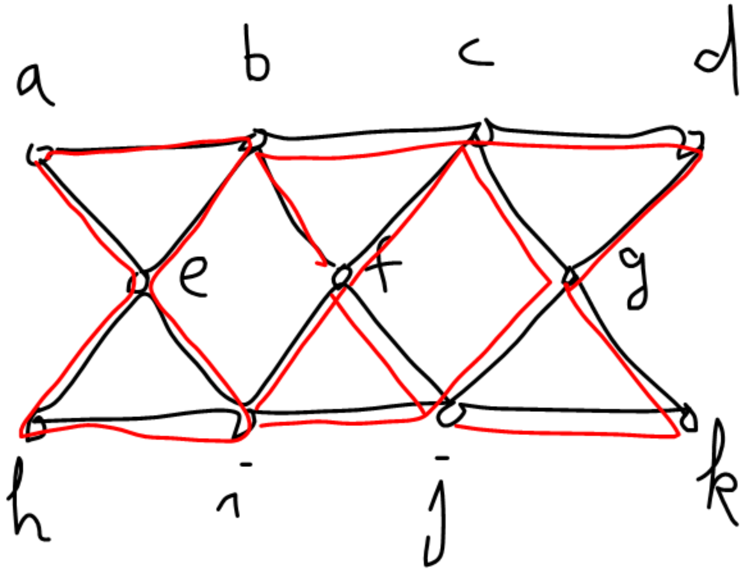
Sætning. En sammenhængende multigraf G med mindst to punkter har en Euler-kreds hvis og kun hvis alle punkter i G har lige grad.

Bevis

Kun hvis: let

Hvis : algoritme





Kreis:

a, e, h, i, e, b, a

i, j, g, c, f, i

j, k, g, d, c, b, f, j

a, e, h, i, j, k, g, d, c, b, f, j, g, c, f, i, e, b, a

Procedure Kreds(G: graf, hvor alle grader er lige,
v: punkt, hvor deg$(v) \geq 2$)

$K := v$

$u := v$

while deg$(u) > 0$

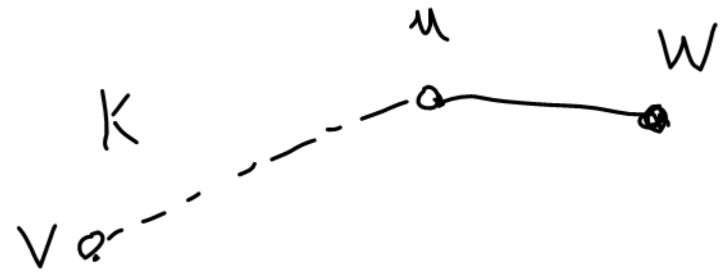
  $w :=$ en nabo til u

  Tilføj kanten $\{u, w\}$ til K

  fjern kanten $\{u, w\}$ fra G

  $u := w$

return K



Invariant:

1. K er en vej fra v til u
2. Hvis $u = v$ så har alle punkter lige grad.
3. Hvis $u \neq v$ så er deg(u) og deg(v) ulige og alle andre punkter har lige grad.

Procedure Euler (G: sammenhængende graf, hvor alle
punkter har lige grad.)

```
v := vilkårligt punkt i G
circuit:=Kreds(G, v)
H := G minus kanterne i circuit
u := v
while u har ikke gennemløbet circuit
    if deg(u) > 0 then
        subcircuit:=Kreds(H, v)
        H := H minus kanterne i subcircuit
        circuit:=circuit med subcircuit indsat efter u
    u := næste punkt på circuit
return circuit
```

{circuit er en Euler-kreds}

Invariant:

- circuit er en kreds i G
- Hver kant i G er enten i H eller i circuit, ikke i begge.
- Alle punkter på circuit før u har grad 0 i H

Antal operationer, der udføres i procedure Kreds, er

$$\text{konstant} \ \cdot \ \text{antal kanter i den konstruerede kreds.}$$

Kompleksitet af procedure Euler: O(antal kanter i G).
(Inklusiv den tid, der bruges i procedure Kreds.)

En Euler-vej i en graf er en simpel vej (fra u til v, hvor $u \neq v$) der bruger hver kant én gang.

Sætning 2. Lad G være en sammenhængende graf og lad u og v være punkter i G.
Så har G en Euler-vej fra u til v
hvis og kun hvis
u og v har ulige grad, og alle andre punkter har lige grad.