2.5. Kardinalitet af mængde. (Antal elementer i mængden.)

$S = \{a, b, c, d, e\}$

S har 5 elementer, $|S| = 5$

da findes en funktion

$f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to S$.

f er surjektiv: alle elementer i S tælles

f er injektiv: hvert tælles kun én gang.

Definition.
Hvis der findes en bijektiv (injektiv og surjektiv) funktion
$f : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto A$
så siger vi at mængden A har kardinalitet n, skrives $|A| = n$.

Den tomme mængde har kardinalitet nul. $|\emptyset| = 0$.

Hvis $g : A \to B$ bijektiv
så $g \circ f : \{1, 2, \ldots, n\} \to B$ bijektiv.
$|B| = n$

Definition.
Hvis der findes en bijektiv funktion $A \mapsto B$
så siger vi at mængderne A og B har samme kardinalitet, skrives $|A| = |B|$.

EKS $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Lige positive tal $L = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Definér $f : \mathbb{Z}^+ \to L$ ved $f(n) = 2n$

f er bijektiv.

$|L| = |\mathbb{Z}^+|$ men $L \subseteq \mathbb{Z}^+$

$|L| = \aleph_0$

Hvis en mængde A har kardinalitet 0 eller $n \in \mathbb{Z}^+$ så siger vi at A er endelig.
Ellers er A uendelig.

Hvis $|A| = |\mathbb{Z}^+|$ så siger vi at A har kardinalitet alef-0, $|A| = \aleph_0$, og at A er tællelig uendelig.

Hvis A er endelig eller $|A| = \aleph_0$ så siger vi at A er tællelig.
Ellers er A overtællelig.

Eksempel. Lad $\Sigma = \{0, 1\}$. Så er mængden Σ^* af bitstrenge tællelig uendelig: $|\Sigma^*| = \aleph_0$.

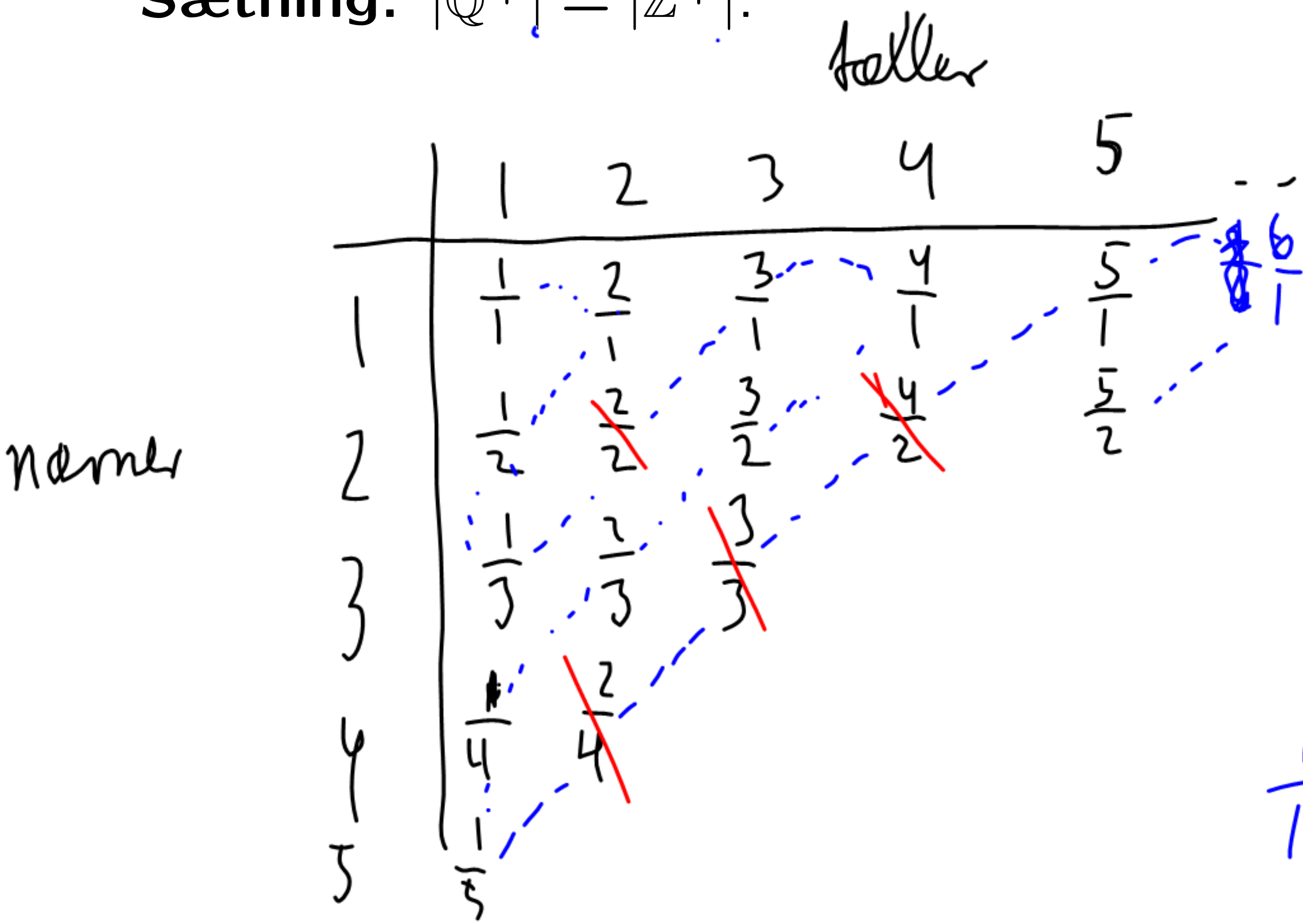
λ, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, ...

1 2 3 4 5 6 7 8 .....

Binært 1 10 11 100 101

De rationale tal $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$.
Positive rationale tal $\mathbb{Q}^+$.

Der er lige så mange hele tal som der er rationale tal:
Sætning. $|\mathbb{Q}^+| = |\mathbb{Z}^+|$.



$$\frac{1000}{1001}$$

Mængden af reelle tal er overtællelig:

Sætning. Intervallet $[0,1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < 1\}$ er ikke tællelig.

$r \in [0,1[$ skrives $0,d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots\ldots$

hvor $d_i \in \{0,1,\ldots,9\}$

$0,5279999\ldots$ skrives $0,528000\ldots$

Vise: der findes ikke en bijektiv funktion

$f : \mathbb{Z}^+ \to [0,1[$

Bevis

Antag f findes,

$f(i) = r_i$

$$r_1 = 0, d_{11}\, d_{12}\, d_{13}\, d_{14} \dots$$
$$r_2 = 0, d_{21}\, d_{22}\, d_{23} \dots$$
$$r_3 = 0, d_{31}\, d_{32}\, d_{33} \dots$$
$$\vdots$$

Definér $d_1, d_2, d_3, \dots$ ved

$$d_i = \begin{cases} 4 & \text{hvis } d_{ii} \neq 4 \\ 5 & \text{hvis } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

Sæt $r = 0{,}d_1 d_2 d_3 \ldots$ $\quad r \in [0,1[$

Da f er surjektiv så findes der $n \in \mathbb{Z}^+$

så $r_n = f(n) = r$

Men $d_{nn} \neq d_n$ så $r_n \neq r$.

Modstrid. f findes ikke.

6.1.

Produktregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan opdeles i et

valg af ét af n_1 elementer

efterfulgt af

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 n_2$ elementer.

Hvis vi skal vælge 1 af 4 aviser

og 1 af 11 ugeblade.

Så er der $4 \cdot 11 = 44$ muligheder.

Sumregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan udføres som enten

valg af ét af n_1 elementer

eller

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 + n_2$ elementer.

Hvis vi skal vælge 1 af 4 anæser

eller 1 af 11 blade

Så er der $4+11=15$ muligheder.

EKS

$$A = \{a, b\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$

Produktregel: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Sumregel: $|A \cup B| = |A| + |B|$, hvis $A \cap B = \emptyset$

Ellers $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$A = \{a, b\}$

Potensmengde: $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$|P(A)| = 2^{|A|}$ hvis A er endelig.

Hvis A uendelig: $|P(A)| \neq |A|$

Hvis $|A| = \aleph_0$ så skrives $|P(A)| = 2^{\aleph_0}$

EKS: $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

6.2: Skuffeprincippet (Pigeonhole principle).

Hvis mindst $k+1$ objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst to objekter.

Hvis der er 8 personer i gruppe.
Så er der 2 med fødselsdag samme ugedag.

Hvis N objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objekter.

runde op til helt tal.

$N = 15$, $k = 7$

$$\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{15}{7} \right\rceil = \left\lceil 2\tfrac{1}{7} \right\rceil = 3$$

Sætning. Enhver følge af n^2+1 forskellige tal indeholder en delfølge af $n+1$ tal, som enten er voksende eller aftagende.

$n = 3$

$$4 \quad 5 \quad 1 \quad 2 \quad \underline{9} \quad \underline{8} \quad 0 \quad \underline{7} \quad \underline{3} \quad 6$$

6.3

S: en mængde med n elementer. $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n$.

En r-permutation af S er en følge af r forskellige elementer fra S: $s_1, s_2, \ldots, s_r$, hvor rækkefølge har betydning.

EKS $S = \{a, b, c, d\}$, $r = 2$

a, b	b, a	c, a	d, a
a, c	b, c	c, b	d, b
a, d	b, d	c, d	d, c

I alt 12 2-permutationer af S.

$|S| = n$

Antal r-permutation af S er

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

s_1 kan vælges på n måder

s_2 kan vælges på $n-1$ måder

s_3 — — $n-2$

$\vdots$

s_r kan vælges på $n-(r-1) = n-r+1$ måder

Produktregel: $P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots 1}{(n-r)(n-r-1)\ldots 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

S: en mængde med n elementer. $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n$.

En r-kombination af S er en mængde af r forskellige elementer fra S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ hvor rækkefølgen er uden betydning.

EKS $\quad S = \{a, b, c, d, e\}, \quad r = 3$

$\{a,b,c\}$	$\{a,c,e\}$	$\{b,d,e\}$
$\{a,b,d\}$	$\{a,d,e\}$	$\{c,d,e\}$
$\{a,b,e\}$	$\{b,c,d\}$	
$\{a,c,d\}$	$\{b,c,e\}$	

I alt 10 3-kombinationer af S.

Antal r-kombinationer af S er

$$\underline{C(n,r)} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Hver r-kombination giver $r!$ r-permutationer

$$C(n,r) \cdot r! = P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

EKS $n=5$, $r=3$

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\;2!} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{120}{6\cdot2} = 10$$

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$$C(n,r) = C(n,n-r).$$

1. Bevis:

$$c(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= C(n,r)$$

2. Bevis kombinatorisk.

Velg r elementer svarer til at fravelge $n-r$ elementer