Binomialkoefficient: $C(n,k) = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

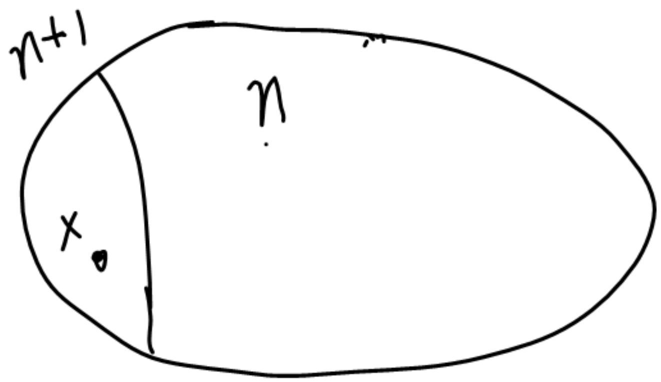
6.4.

Sætning

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Bevis (kombinatorisk)

Antal k-kombination af en mængde med $n+1$ elementer=
antal k-kombinationer, der indeholder et element x +
antal k-kombinationer, der ikke indeholder x.



2. Beweis

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-(k-1))!} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =$$

$$\frac{k \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} =$$

$$\frac{(k+n-k+1)\ \ n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

EKS

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2}$$

Pascals trekant:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\[1em]
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\[1em]
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\[1em]
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{\underline{2}} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

I siderne står 1. Andre tal er sum af de to tal over tallet. Trekanten er symmetrisk om en lodret akse gennem midten da $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

Pascals trekant:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Binomial sætningen.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \quad .$$

$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y) =$
$xxx + xxy + xyx + xyy + yxx + yxy + yyx + yyy =$
$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ $=$

$$\binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3$$

<u>Bevis</u> $(x+y)^n = (x+y)(x+y) \ldots (x+y)$.

Gange ud: antal led på formen $x^{n-i} y^i =$

antal måder vi kan vælge i parenteser

hvorfra vi tager Y. $=$

$$\binom{n}{i}$$

EKS

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Korollar.

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \, 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

2^n er antal delmængder af en mængde med n elementer.
$\binom{n}{i}$ er antal delmængder med i elementer.

Korollar.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i$$

$$0 = 0^n = (1-1)^n = (1+(-1))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ lige}}}^{n} \binom{n}{i} - \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ulige}}}^{n} \binom{n}{i}$$

Antal delmængder med lige antal elementer $= 2^{n-1}$.

$=$ Antal delmængder med ulige antal elementer $= 2^{n-1}$.

8.1

Tårnet i Hanoi

n skiver, alle med forskellig størrelse kan ligge (ovenpå hinanden) på tre pladser. Men en stor må ikke ligge ovenpå en mindre skive.

Man kan flytte én skive ad gangen.

Fra starten ligger alle skiver på plads 1.
De skal flyttes til plads 2.
Lad H_n være det mindste antal træk, der kan flytte skiverne fra plads 1 til plads 2.

$\{f, t, v\} = \{1, 2, 3\}$

procedure $Hanoi(k, f, t, v)$
$\{$Flyt de øverste k skiver fra plads f til plads t via plads $v\}$
if $k = 1$ **then** Flyt en skive fra plads f til plads t
else

$Hanoi(k-1, f, v, t)$

Flyt en skive fra plads f til plads t

$Hanoi(k-1, v, t, f)$

$$H_1 = 1$$

$$n \geq 2: \quad H_n = H_{n-1} + 1 + H_{n-1} = 2H_{n-1} + 1$$

$$H_2 = 2 \cdot H_1 + 1 = 3$$

$$H_3 = 2 \cdot H_2 + 1 = 7, \quad H_4 = 2 \cdot H_3 + 1 = 15$$

8.2

Lineær homogen rekursionsligning (rekurrensligning, differensligning) af grad (orden) 1 med konstante koefficienter:

$$a_n = ca_{n-1}.$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ er her den ubekendte følge og c er et reelt tal, $c \neq 0$.

$H_n = 2H_{n-1} + 1$ ikke homogen

Lineær homogen rekursionsligning af grad 2 med konstante koefficienter:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2},$$

hvor $c_2 \neq 0$.

Grad 1

$$(*) \qquad a_n = c\, a_{n-1} \qquad\qquad c, s \text{ kendte konst.}$$

$$(**) \qquad a_0 = s$$

$$a_1 = c \cdot a_0 = c \cdot s$$
$$a_2 = c \cdot a_1 = c^2 \cdot s$$
$$a_3 = c \cdot a_2 = c^3 \cdot s$$
$$\vdots$$
$$a_n = c^n \cdot s$$

Følgen $a_0, a_1, \dots,$ er entydigt bestemt fra ligningen $(*)$ og startbetingelsen $(**)$

Grad 2

$(*)\quad a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

$(**)\quad a_0 = s \,,\quad a_1 = t$

c_1, c_2, s, t konstanter.

$$a_2 = c_1 a_1 + c_2 a_0 = c_1 t + c_2 s$$
$$a_3 = c_1 a_2 + c_2 a_1 = c_1 (c_1 t + c_2 s) + c_2 t$$

a_n er entydigt bestemt fra $(*)$ og $(**)$

Gæt: $a_n = r^n$ er en løsning til $(*)$, hvor $r \neq 0$

Indsæt $a_n = r^n$ i $(*)$: $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

$$r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2}$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 r^{n-2} = (c_1 r + c_2) r^{n-2}$$

$$\Updownarrow \qquad (r \neq 0)$$

$$r^2 = c_1 r + c_2$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

Karakteristisk ligning

Sætning 1 Betragt rekursionsligningen $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$.
Ligningen $r^2 = c_1 r + c_2$ (eller $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$) kaldes den karakteriske ligning for rekursionsligningen.
Hvis den karakteristiske ligning har to forskellige rødder r_1 og r_2, så er løsningen til rekursionsligningen:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n,$$

DVS $D > 0$

hvor α_1 og α_2 er vilkårlige konstanter.

<u>EKS</u> Find løsning til $a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
hvor $a_0 = 0$ og $a_1 = 3$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 = -r + 2$$

$$\Updownarrow$$

$$r^2 + r - 2 = 0 \qquad D = 1^2 - 4\cdot(-2) = 9$$

$$r_1 = \frac{-1+\sqrt{9}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$r_2 = \frac{-1-\sqrt{9}}{2} = -2$$

Lösning:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 \cdot (-2)^n =$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-2)^n$$

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot (-2)^0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$a_1 = \alpha_1 + \alpha_2 (-2)^1 = \alpha_1 - 2\alpha_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \alpha_1 = 1, \; \alpha_2 = -1$$

$$a_n = 1 - 1 \cdot (-2)^n$$

8.1 + 8.2: Fibonacci-tal

Antal kanin-par efter n måneder: f_n.

Forudsætninger:

kaniner dør aldrig,

to måneder efter et kanin-pars fødsel får de ét par kanin-unger og derefter får de ét par unger hver måned.

Altså: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Desuden er $f_1 = 1$ og $f_2 = 1$.

$$r^2 = r + 1$$

Karakteristisk ligning: $r^2 - r - 1 = 0$.

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$$

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$