8.3.

Del-og-hersk algoritme:
Et problem af størrelse n deles op i et antal mindre problemer (f.eks. af størrelse $\frac{n}{2}$).
Løs hver af de mindre problemer og saml deres løsninger til en løsning af det oprindelige problem.

Eksempel. **Merge sort:**
For at sortere en liste med n elementer gør vi følgende

- sorter første halvdel af listen,
- sorter anden halvdel af listen og
- flet de to sorterede lister.

Hvis $M(n)$ er antal sammenligninger, der skal bruges, så er

$$M(n) = 2M\left(\frac{n}{2}\right) + n.$$

Eksempel?? **Binær søgning:**

For at finde x i en sorteret liste med n tal gør vi følgende

- afgør om x skal søges i første eller anden halvdel.
- søg x i den pågældende halvdel.

Hvis $f(n)$ er antal sammenligninger, der skal bruges, så er

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 2.$$

Opgave: Løs rekursionsligninger som de to ovennævnte.

Sætning 1.

Lad f være en *voksende* funktion (fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}$) som opfylder

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c,$$

når b går op i n, hvor $b \geq 2$ er et heltal, og $a \geq 1, c > 0$.

1. Hvis $n = b^k$, $k \in \mathbb{Z}^+$ og $a \neq 1$ så er

   $\in \mathbb{N}$

   $$f(n) = (f(1) + \frac{c}{a-1})n^{\log_b a} - \frac{c}{a-1}. = C_1 n^{\log_b a} + C_2$$

2. Mere generelt:

   $f(n)$ er $O(n^{\log_b a})$ hvis $a > 1$ og

   $f(n)$ er $O(\log n)$ hvis $a = 1$.

Bevis for 1. ved induktion efter k

Basis ($k=0$) $n = b^0 = 1$

$$\left(f(1) + \frac{c}{a-1}\right) 1^{\log_b a} - \frac{c}{a-1} = f(1)$$

Induktion Lad $k \geq 0$ og antag 1. er sand for $n = b^k$

Betragt $n = b^{k+1}$

$$f(n) = f\left(b^{k+1}\right) = a\, f\left(b^k\right) + c =$$

(induktionsantagelse)

$$a\left(\left(f(1)+\frac{c}{a-1}\right)\left(b^{k}\right)^{\log_b a}-\frac{c}{a-1}\right)+c=$$

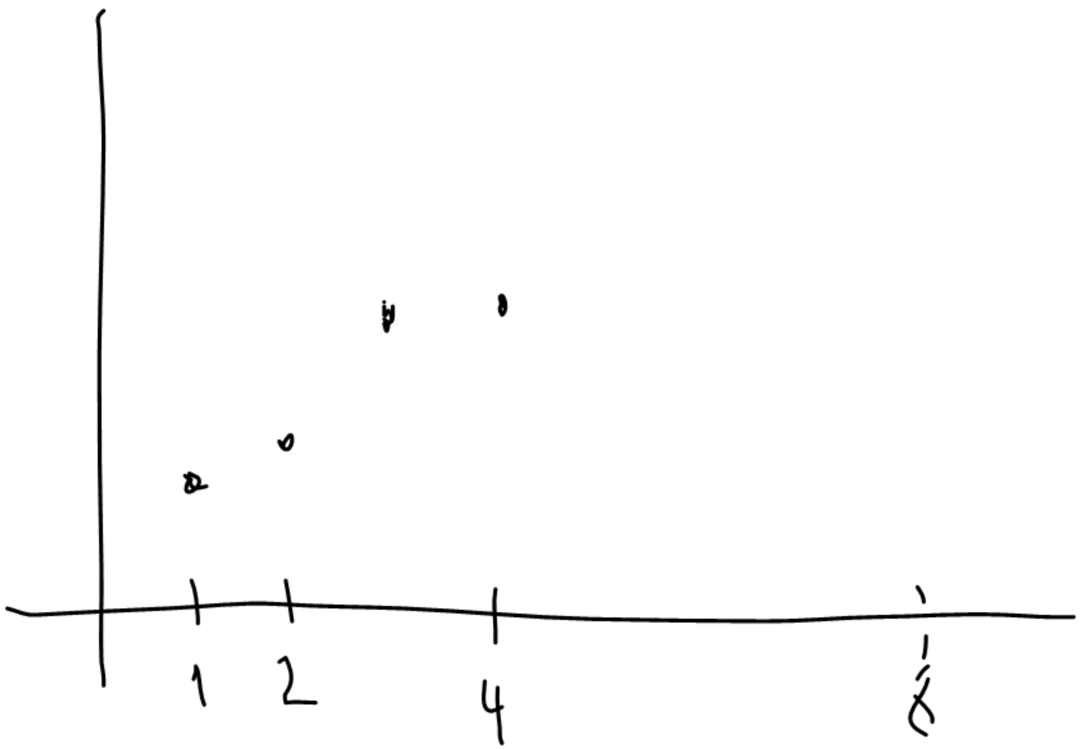
$$\boxed{b^{\log_b a}=a}$$

$$\left(f(1)+\frac{c}{a-1}\right)b^{\log_b a}\left(b^{k}\right)^{\log_b a}-\frac{ac}{a-1}+c=$$

$$\left(f(1)+\frac{c}{a-1}\right)\left(b^{k+1}\right)^{\log_b a}-\frac{ac}{a-1}+\frac{c(a-1)}{a-1}$$

$$\left(f(1) + \frac{c}{a-1}\right) n^{\log_b a} - \frac{c}{a-1}$$

Formulen 1. gjelder altså for alle k.



EKS $f(n) = f(\frac{n}{2}) + 2$

$a=1,\ b=2,\ c=2$

$f(n)$ er $O(\log n)$

Sætning 2. (Master Theorem)
Lad f være en *voksende* funktion (fra $\mathbb{Z}^+$ til $\mathbb{R}$) som opfylder

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d,$$

når b går op i n, hvor $b \geq 2$ er et heltal, og $a \geq 1, c > 0, d \geq 0$. Så gælder der at

$f(n)$ er $O(n^d)$, hvis $a < b^d$

$f(n)$ er $O(n^d \log n)$, hvis $a = b^d$

$f(n)$ er $O(n^{\log_b a})$, hvis $a > b^d$.

EKS

$$M(n) = 2\,M\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$a=2,\quad b=2,\quad c=1,\quad d=1$$

$$a = b^d = 2^1 = 2$$

$M(n)$ er $O(n^1 \log n)$ $\quad O(n \log n)$

Eksempel. Find punkt-par med mindst afstand i planen.

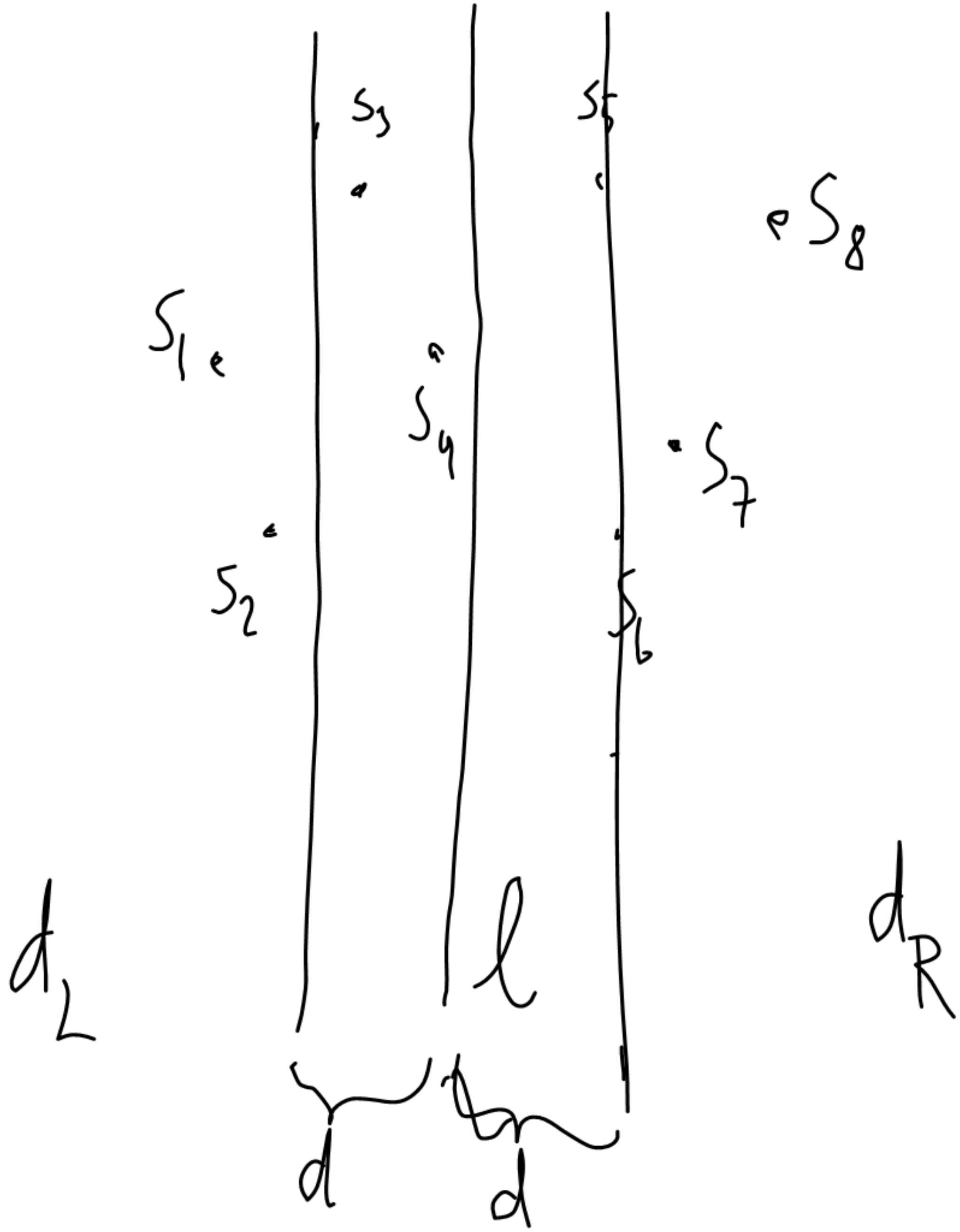
Lad $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ være punkter i planen. Find et par af disse punkter, hvor afstanden er mindst mulig.

Der $\binom{n}{2}$, $= \frac{n(n-1)}{2}$ par af punkter. Simpel algoritme: Find afstand mellem hvert par af punkter og vælg det par der har mindst afstand. Kompleksitet: $O(n^2)$.

Del-og-hersk algoritme.

Lav en liste med punkterne sorteret efter voksende x-koordinat. Merge sort $O(n \log n)$. $S_1 \; \cdots \; S_n$

Lav en anden liste med punkterne sorteret efter voksende y-koordinat. $O(n \log n)$.



$$d = \min(d_L, d_R)$$

Tag de første $\frac{n}{2}$ punkter fra første liste. Disse punkter ligger til venstre for eller på en lodret linie ℓ. De øvrige punkter ligger til højre for eller på linien ℓ.

Find (rekursivt) den mindste afstand d_L mellem den venstre halvdel af punkterne.

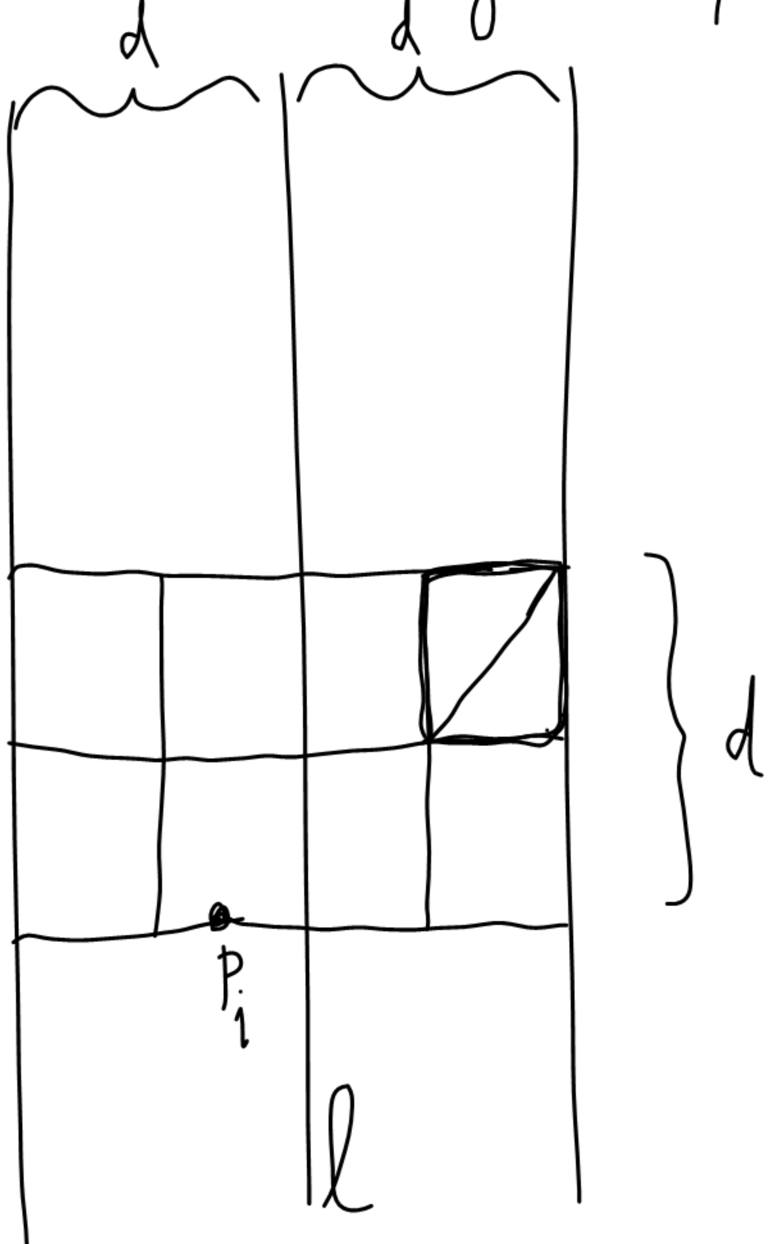
Find (rekursivt) den mindste afstand d_R mellem den højre halvdel af punnkterne.

Sæt $d = \text{min}\{d_L, d_R\}$.

Findes der et punkt i venstre halvdel og et punkt i højre halvdel med afstand mindre end d ?

> Disse skal søges blandt de (højst n) punkter, der har afstand $\leq d$ fra ℓ.

Lad $P_1, P_2, \ldots, P_m$ være disse punkter sorter efter y-værdi



8 kvadrater med side $\frac{d}{2}$

Største afstand i kvadrat

$$\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$< d$$

Højst ét punkt i hvert kvadrat.

$P_i \, , \underbrace{P_{i+1} \, , \dots , P_{i+7}}$ kan være i kvadratet

Disse skal søges blandt de (højst n) punkter, der har afstand $\leq d$ fra ℓ.

Lad $P_1, \ldots, P_m$ være disse punkter sorteret efter voksende y-koordinat.

Det er nok at bestemme afstanden fra hvert P_i til punkterne $P_{i+1}, \ldots, P_{i+7}$.

Lad $f(n)$ betegne antal operationer der kræves (efter de to indledende sorteringer) for at findes minimum afstand med denne algoritme.

Så er $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + Cn$.

$a = 2, \quad b = 2, \quad d = 1, \quad C > 0$

Da $a = b^d = 2$ er $f(n)$ $O(n^d \log n)$

$f(n)$ er følge Sætning 2

$$O(n \log n).$$

9.1 Relationer.

Definition. Lad A og B være mængder. En (binær) relation fra A til B er en delmængde af $A \times B$.
En relation fra A til A kaldes en relation *på* A.

Hvis $R \subseteq A \times B$ er relation så skrives $(a, b) \in R$ som aRb.
$a \not R b$ betyder $(a, b) \notin R$.

EKS A = medlemmer af projektgruppe

B = kapitler i projekt

$R = \{ (a, b) \mid a$ har skrevet på kapitel $b \}$

EKS $\quad A = \{a, b, c, d\}$

En relation på A:

$$R = \{(a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (c,d)\}$$

EKS $\quad A = \mathbb{Z}$

Relationer på $\mathbb{Z}$:

$< \quad R = \{(a,b) \mid a < b\}$

$(a,b) \in R$ skrives aRb eller $a < b$

gợi ý :

$$R = \{ (a,b) \mid a \mid b \}$$

$$3 \mid 9 \quad , \quad 4 \nmid 13$$

Definition. En relation R på en mængde A siges at være

- refleksiv hvis aRa for alle $a \in A$
- symmetrisk hvis $aRb \Leftrightarrow bRa$
- antisymmmetrisk hvis $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitiv hvis $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

EKS $A = \mathbb{Z}$, R er $\leq$

$\leq$ er refleksiv da $a \leq a$ for alle a

$\leq$ er ikke symmetrisk, f.eks

$3 \leq 7$ men $7 \not\leq 3$

$\leq$ er antisymmetrisk hvis $a \leq b$

og $b \leq a$ så er $a = b$

$\leq$ er transitiv da hvis

$a \leq b$ og $b \leq c$ så $a \leq c$

EKS $A = \mathbb{Z}^+$, $R = \{(a,b) \mid \gcd(a,b) = 1\}$

R er ikke refleksiv $\gcd(3,3) = 3 \neq 1$

$3 \not R 3$

R er symmetrisk $\gcd(a,b) = \gcd(b,a)$

R er ikke antisymmetrisk

R er ikke transitiv $3 R 5$ og $5 R 9$

men $3 \not R 9$

Mængdeoperationer på relationer: $\cup$, $\cap$, $-$, ...

EKS $A = \mathbb{R}$

$$L = \{ (a,b) \mid a = b \}$$

$$M = \{ (a,b) \mid a < b \}$$

$$L \cup M = \{ (a,b) \mid a \leq b \}$$

Hvis R er en relation fra A til B
og S er en relation fra B til C
så defineres en relation $S \circ R$ fra A til C ved

$$a(S \circ R)c \Leftrightarrow \exists b \in B(\underline{aRb} \wedge bSc).$$

<u>EKS</u>

$$A = B = C = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a,b), (b,b), (a,c), (c,a), (c,b)\}$$

$$S = \{(a,c), (\underline{b,a}), (c,b), (c,c)\}$$

$$S \circ R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a),$$

$, (c, c), (c, a) \}$

En funktion fra A til B er en relation f fra A til B, der opfylder at for ethvert element $a \in A$ findes der præcis ét element $b \in B$ sådan at afb (skrives $f(a) = b$).
Hvis f desuden opfylder at for ethvert element $b \in B$ findes der præcis ét element $a \in A$ sådan at afb, så er f bijektiv.

Hvis R er en relation på A så defineres R^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ ved $R^1 = R$ og $R^{n+1} = R^n \circ R$, for $n \geq 1$.

$$R^2 = R \circ R$$

$$R^3 = R \circ R \circ R$$