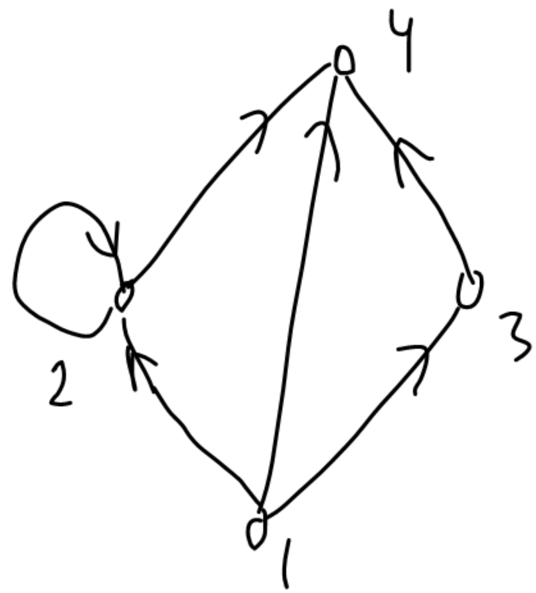
9.3 + 9.4

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

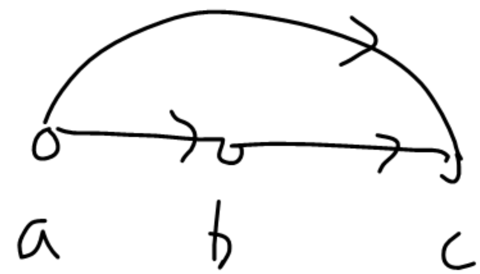
$$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4), (2,2)\}$$

$G = (A, R)$ en orientert graf



R transitiv $\quad (a,b),(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

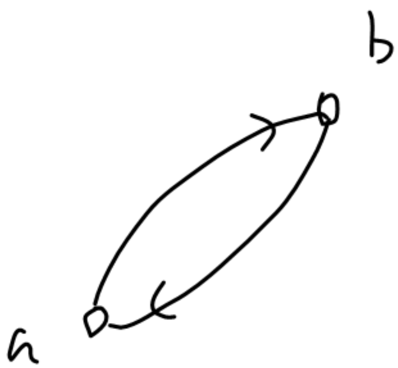
$\Rightarrow$

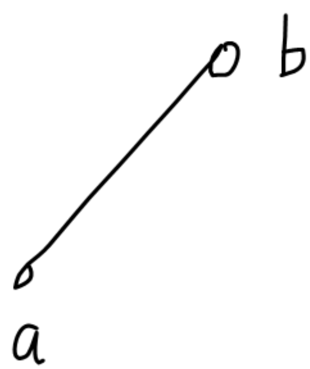


9.3.

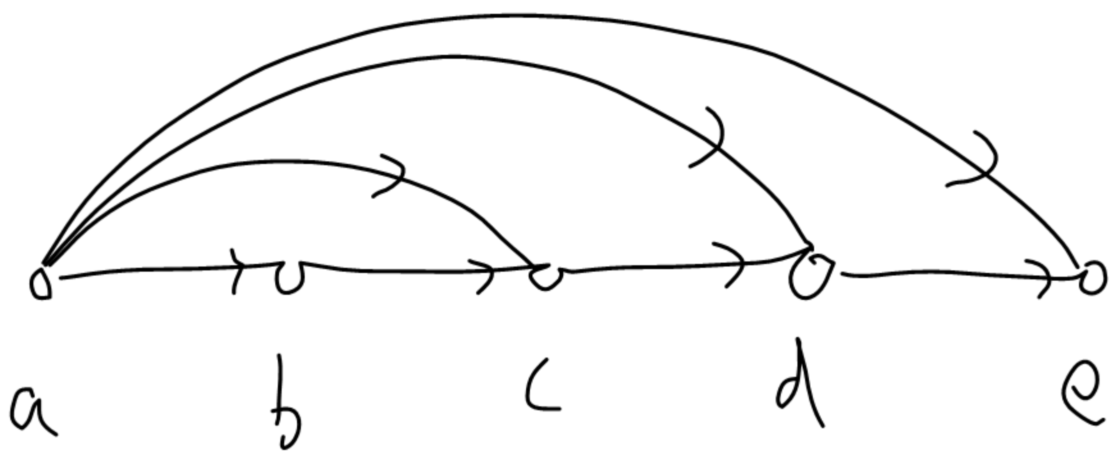
En relation R på en (endelig) mængde A kan repræsenteres af en orienteret graf med punktmængde A og kantmængde R; altså en kant fra a til b hvis aRb.

Hvis relationen er symmetrisk kan de to orienterede kanter (a, b) og (b, a) erstattes af en ikke-orienteret kant $\{a, b\}$.





En relation er transitiv hvis og kun hvis
den opfylder at for ethvert par af punkter (a, b) hvor der er en vej af længde mindst 1 fra a til b gælder at aRb.



Transitiv afslutning af en relation R på en mængde A.

Hvis S_1 og S_2 er transitive relationer på A så er $S_1 \cap S_2$ også en transitiv relation på A.

Hvis $(a,b), (b,c) \in S_1 \cap S_2$

så er $(a,b), (b,c) \in S_1$ og dermed $(a,c) \in S_1$

og $(a,b), (b,c) \in S_2$ og dermed $(a,c) \in S_2$

Altså $(a,c) \in S_1 \cap S_2$

Hvis $S_1, S_2, S_3, \dots, S_\ell$ er

transitive relationer, $R \subseteq S_i$ for alle i

Så

sæt $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \dots \cap S_\ell$

Så er S en transitiv relation og $R \subseteq S$

Der findes en transitiv relation S på A så $R \subseteq S$, f.eks. $S = A \times A$.

Den transitive afslutning af R er den mindste transitive relation S på A som opfylder at $R \subseteq S$.
S er altså fællesmængden af alle transitive relationer, der indeholder R.

På samme måde kan man definere refleksiv afslutning og symmetrisk afslutning (men *ikke* antisymmetrisk afslutning).

R : relation på A

Refleksiv afslutning

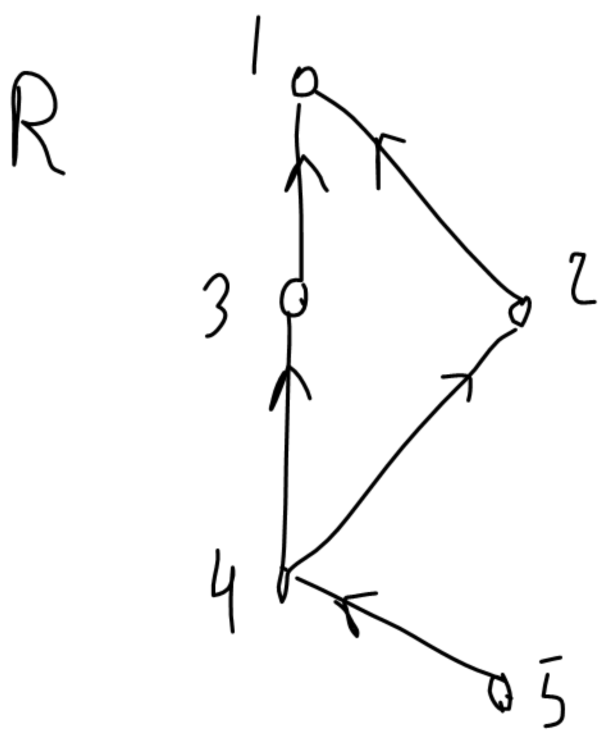
$$R \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$$

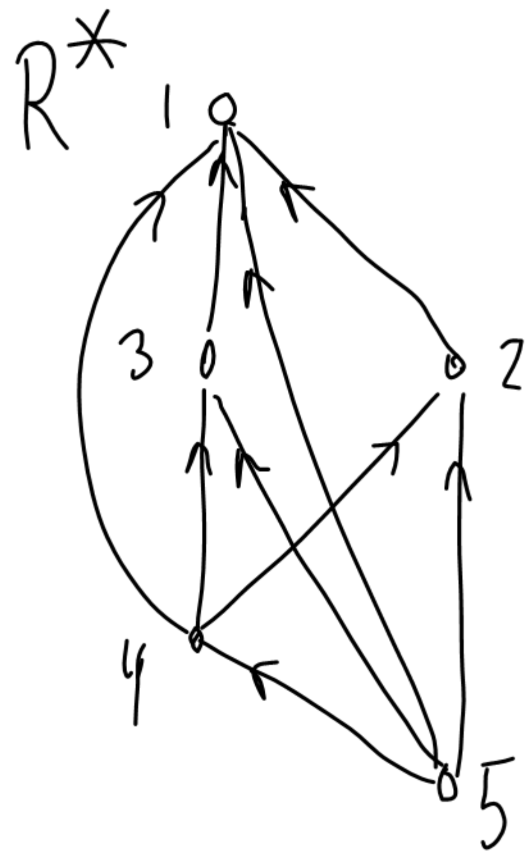
Symmetrisk afslutning

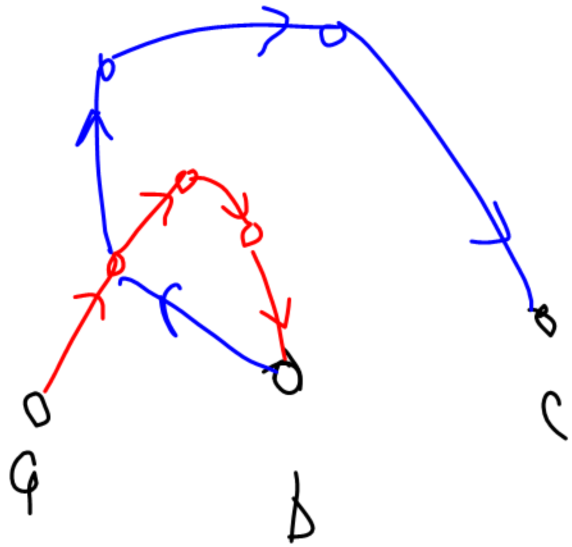
$$R \cup R^{-1} \quad , \quad R^{-1} = \{ (b,a) \mid (a,b) \in R \}$$

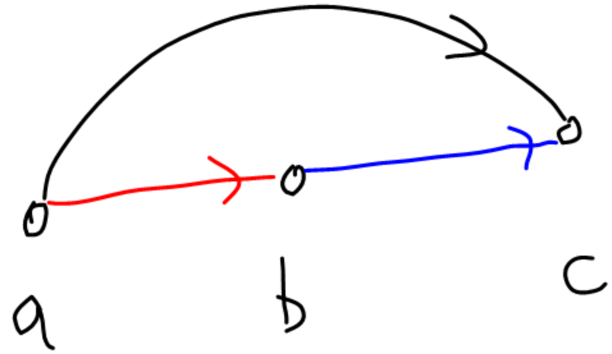
Hvis R er en relation på A så er R^* relationen på A der opfylder at aR^*b hvis og kun hvis
grafen der repræsenterer R har en vej fra a til b af længde mindst 1.

R^* er den transitive afslutning af R.






a
b
c


a
b
c

$(a, b) \in R^n$ hvis og kun hvis der er en vej af længde n fra a til b i grafen der repræsenterer R.

$$R^2 = R \circ R$$

$$(a, b) \in R^2 \iff \exists c \, (aRc \wedge cRb)$$

$\iff$ grafen har vej af længde 2 fra a til b

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots\ldots$$

2.6

Fra afsnit 1.1 har vi følgende bit-operationer: $\vee$ og $\wedge$.

0 Falsk $\qquad 0 \vee 0 = 0 \quad , \quad 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$

1 Sand $\qquad 1 \wedge 1 = 1 \quad , \quad 1 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 0 \wedge 0 = 0$

En $0-1$ matrix er en matrix hvor alle tal er enten 0 eller 1.

Vi definerer nye operationer på $0-1$ matricer.

Hvis $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er $n \times n$, $0-1$ matricer så er $S = A \vee B$ og $T = A \wedge B$ også $n \times n$, $0-1$ matricer defineret ved $S = [s_{ij}]$ og $T = [t_{ij}]$ hvor

$$s_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij},$$

$$t_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

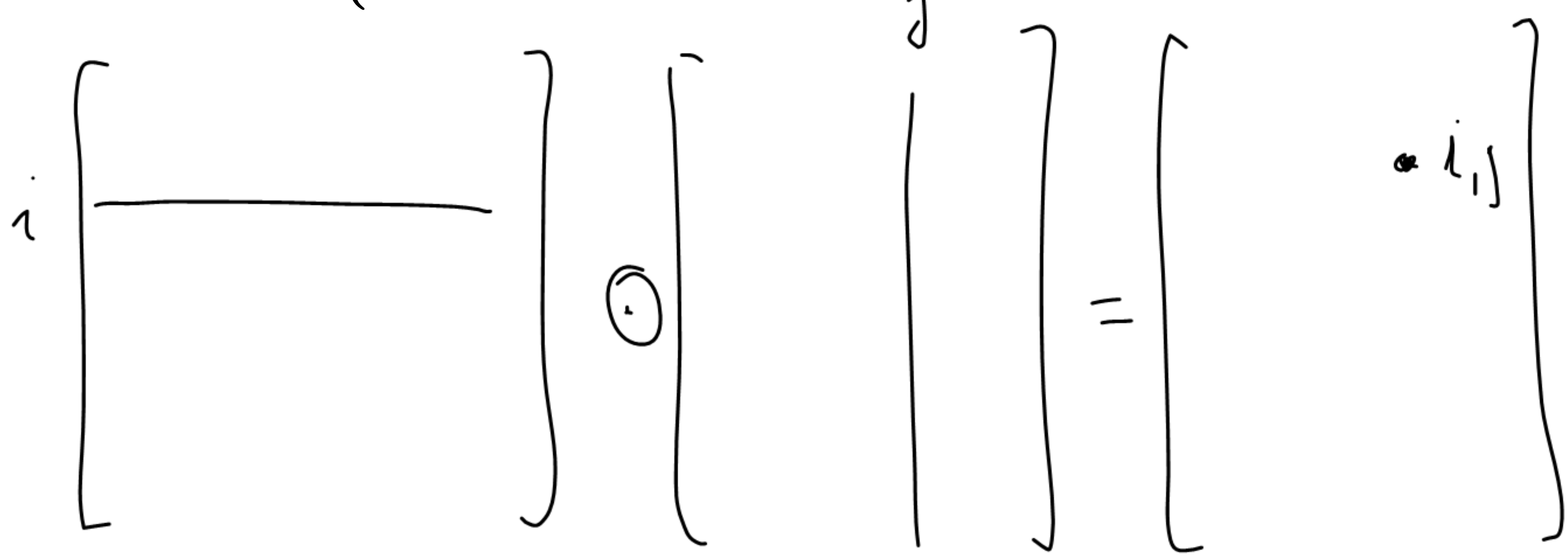
$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \cdots\cdots$$

Desuden defineres produktet $P = A \odot B$, som også er en $n \times n$, $0 - 1$ matrix ved $P = [p_{ij}]$ hvor

$$p_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}).$$

Dette kan også skrives som

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis der findes } \ell \text{ så } \; a_{i\ell} = 1 \wedge b_{\ell j} = 1 \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$



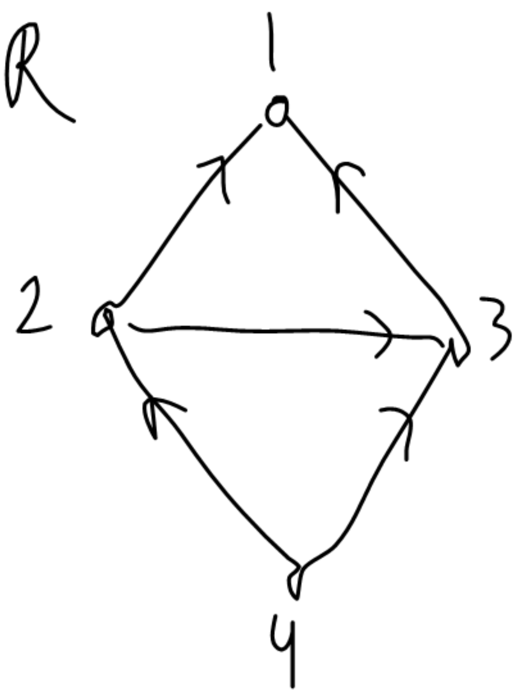
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9.3 + 9.4

En relation R på $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan repræsenteres af en $n \times n$ matrix $M_R = [m_{ij}]$, hvor

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis } \cancel{a_i R b_j} \quad a_i R a_j \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

R



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

S, R relationer på A

Så er

$$M_{S\cup R} = \underline{M_S} \vee \underline{M_R}$$

$$M_{S\cap R} = M_S \wedge M_R$$

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

$$(a_i, a_j) \in S \circ R \iff \exists l \left(a_i R a_l \wedge a_l S a_j \right)$$

Indgang (i,j) i matricen:

$$(M_{S\circ R})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \exists l\left((M_R)_{il} = 1 \wedge (M_S)_{lj} = 1\right) \\ 0 & \end{cases}$$

$$= (M_R \odot M_S)_{ij}$$

~~Disse skal søges blandt de (højst n) punkter, der har afstand $\leq d$ fra v.~~

$$M_{R^*} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee \cdots$$

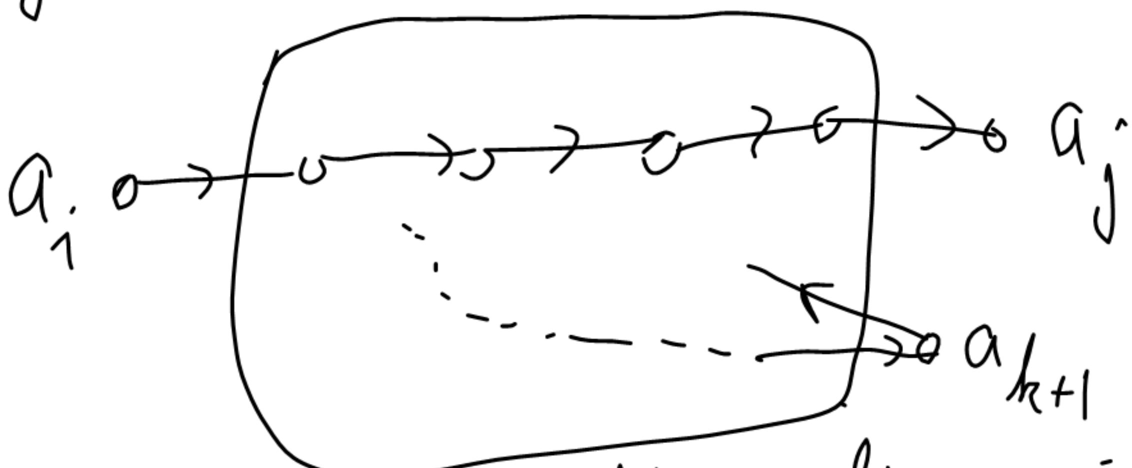
$$M_R \vee M_R \odot M_R \vee M_R \odot M_R \odot M_R \vee \cdots\cdots$$

R: en relation på $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ repræsenteret af matricen M_R.

Bestem matricen M_{R^*}, der repræsenterer relationen

$$R^* = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{der findes en vej fra } a \text{ til } b\}.$$

Vej fra a_i til a_j i R



Vejens indre punkter ligger i $\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_k\}$

$k = 0$: Vejen består af én kant (a_i, a_j)

$k = n$: alle veje

procedure Warshall (M_R: $n \times n$, $\{0, 1\}$ matrix)
$W := M_R \qquad \{W = [w_{ij}]\}$
$k := 0$
while $k < n$
  $k := k + 1$
  for $i := 1$ **to** n
    for $j := 1$ **to** n
      if $\underline{w_{ik} = 1} \wedge \underline{w_{kj} = 1}$ **then** $\underline{w_{ij} := 1}$

$\{W = M_{R^*}\}$

Invariant for while-løkken: $w_{ij} = 1$ hvis der findes en vej af længde mindst 1 fra a_i til a_j hvor alle indre punkter $\in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Ellers er $w_{ij} = 0$.

9.5

En relation $\sim$ på en mængde A siges at være en ækvivalensrelation hvis

- $\sim$ er refleksiv,
- $\sim$ er symmetrisk og
- $\sim$ er transitiv.

EKS $A =$ mængden af studerende på P2.

$a \sim b$ hvis a og b er samme gruppe.

$\sim$ er en ækvivalens relation.

EKS

S er mængden af alle funktioner fra A til B

Lad $t \in S$

Relation på S:

$$f \sim g \quad \text{hvis } f(t) = g(t)$$

$\sim$ er en ækvivalens relation.

EKS

Lad $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 2$

En relation på $\mathbb{Z}$ defineret ved

$a \equiv b \pmod{m}$ hvis $m \mid a-b$

refleksiv $m \mid a-a=0$

symmetrisk $m \mid a-b \Rightarrow m \mid b-a$

transitiv $m \mid a-b$ og $m \mid b-c \Rightarrow$

$m \mid a-b+b-c = a-c$

Hvis A er mængde og hvis K er en mængde af ikke-tomme delmængder af A (altså: $K \subseteq P(A)$, $\emptyset \notin K$) som opfylder at hvert element i A tilhører præcis én af mængderne i K så siger vi at K er en klassedeling af A og mængderne i K kaldes klasser.

Hvis A er en mængde med klassedeling K så er relationen $\sim$ på A defineret

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{ } a \text{ og } b \text{ tilhører samme klasse i } K$$

en ækvivalensrelation.

Omvendt, hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så udgør de forskellige ækvivalensklasser en klassedeling af A.