DMat-02

Et **udsagn** (proposition) er en tekst, der enten er **sand** (T) eller **falsk** (F).

$p, q, r, \ldots$ bruges til betegne en udsagnsvariabel, et udsagn eller et sammensat (compound) udsagn.

Et **sammensat udsagn** er opbygget fra andre udsagn ved hjælp **logiske konnektiver**, som f.eks. $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$ og $\leftrightarrow$, der kan defineres ved **sandhedstabeller**:

p	$\neg p$ (ikke p)
T	F
F	T

		p og q	p eller q		hvis p så q	p hvis og kun hvis q
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

I udsagnet $p \rightarrow q$ kaldes p **hypotesen** og q kaldes **konklusionen**.

De ovenstående udsagn er udtryk ved to variable, p og q. Der er 2^2 kombinationer af sandhedsværdier for de to variable. Sandhedstabellen har altså 2^2 rækker.
Sandhedstabellen for et sammensat udsagn med n variable har 2^n rækker.

$$((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$$

Tautologi

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \land (q \to r)$	$p \to r$	
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

kold $\wedge$ sne $\vee$ regn

Konnektiverne evalueres i følgende rækkefølge:

$\neg$, $(\wedge, \vee)$, $(\rightarrow, \leftrightarrow)$.

Hvis evalueringen ønskes foretaget i en anden rækkefølge skal der benyttes parenteser.

Sæt også parenteser hvis du er i tvivl.

C-program

<u>if</u> $p \wedge q \vee r$ <u>then</u> ....

$(p \wedge q) \vee r$

<u>if</u> $p \vee q \wedge r$ <u>then</u> ...

$(p \vee q) \wedge r$

Et sammensat udsagn hvori der indgår et antal variable
siges at være en **tautologi**
hvis det er sandt for alle sandhedsværdier af de variable.
(Sandhedstabellen for udsagnet har altså T i alle rækker.)

To sammensatte udsagn p og q siges at være **ækvivalente**,
skrives $p \equiv q$ (eller $p \Leftrightarrow q$),
hvis $p \leftrightarrow q$ er en tautologi.
(Sandhedstabellerne for to udsagn er altså ens.)

Eksempler på ækvivalente udsagn:

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (de Morgans lov)

- $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ (de Morgans lov)

- $p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$ (distributiv lov)

- $p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$ (distributiv lov)

- $(p \leftrightarrow q) \equiv \neg(p \oplus q)$

- $(p \oplus q) \equiv (p \lor q) \land \neg(p \land q)$

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$

$$
\begin{aligned}
p \leftrightarrow q &\equiv \neg(p \oplus q) \\
&\equiv \neg\big((p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)\big) \\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee \neg\neg(p \wedge q) && \text{de Morgan} \\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee (p \wedge q) && \text{dobbelt negation} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) && \text{de Morgan} \\
&\equiv (\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee q) && \text{distributiv} \\
&\equiv T \wedge (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \wedge T \\
&\equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)
\end{aligned}
$$

EKS Vise $(p \wedge (p \to q)) \to q$ er en tautologi

1. sandhedstabel

2. $\equiv \ldots \equiv \ldots$

3. Antag hypotesen $p \wedge (p \to q)$ er sand.

   $\underbrace{p \text{ sand}}$ og $p \to q$ er sand

   Hypotesen sand

   Derfor er konklusion q sand

Altså: $(p \wedge (p \to q)) \to q$ er en tautologi

Eks

$p \oplus q$ sand hvis

p sand, q falsk $\qquad p \wedge \neg q$

eller p falsk, q sand $\qquad \neg p \wedge q$

$$p \oplus q \equiv \underbrace{(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)}_{\text{disjunktiv normal form}}$$