|

DMat-03

Et **åbent udsagn** (udsagnsfunktion, propositional function) er en påstand, der involverer én eller flere variable og en egenskab (prædikat) for disse variable. Når variablene tildeles værdier får det åbne udsagn en sandhedsværdi og er dermed et udsagn. Variable antager værdier i en grundmængde (domain/universe).

Et åbent udsagn kan skrives f.eks.: $P(x), Q(x,y), \ldots$.

Eksempel: $2x + 3y = 4$ er et åbent udsagn, som eventuelt kan betegnes med $P(x,y)$.

$P(0,0)$ Falsk

$P(2,0)$ T

Alkvantor: $\forall x P(x)$ er et *udsagn* som er sandt hvis $P(c)$ er sandt for ethvert element c. Det er falsk hvis der findes c så $P(c)$ er falsk.

Eksistenskvantor: $\exists x P(x)$ er et *udsagn* som er sandt hvis der findes et element c i grundmængden så $P(c)$ er sand. Det er falsk hvis $P(c)$ er falsk for alle c.

Eksempel: $\forall x \exists y (2x + 3y = 4)$. Grundmængden er her de reelle tal, $\mathbb{R}$. I Rosens bog er grundmængden (altid) underforstået. Andre bøger skriver måske: $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (2x + 3y = 4)$

$\forall x\,(2x+3y=4)$ åbent udsagn

EKS

Grundmængde: DMAT-studerende

$P(x)$: x besvarer alle opgaver korrekt

$Q(x)$: x består eksamen

$\forall x \, (P(x) \to Q(x))$ de, der løser alle opgaver, består

De Morgans love for kvantorer giver ækvivalenser i udsagn der involverer negation:

$$\neg\underline{\exists x P(x)} \quad \equiv \quad \forall x \neg P(x)$$

$$\neg\forall x P(x) \quad \equiv \quad \exists x \neg P(x)$$

Ækvivalens for udsagn der involverer kvantorer og åbent udsagn $P(x)$ betyder at de to udsagn har samme sandhedsværdi, for ethvert åbent udsagn $P(x)$.

$$\neg \forall x \left(P(x) \to Q(x)\right) \equiv \exists x \neg \left(P(x) \to Q(x)\right)$$

de Morgan
Kvantor

$$\equiv \exists x \neg \left(\neg P(x) \vee Q(x)\right)$$

$$\equiv \exists x \left(\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x) \right) \qquad \text{de Morgan}$$

$$\equiv \exists x \left(P(x) \wedge \neg Q(x) \right)$$

Udsagn med to kvantorer.

To par af ækvivalente udsagn:

$$\forall x \forall y P(x,y) \equiv \forall y \forall x P(x,y)$$

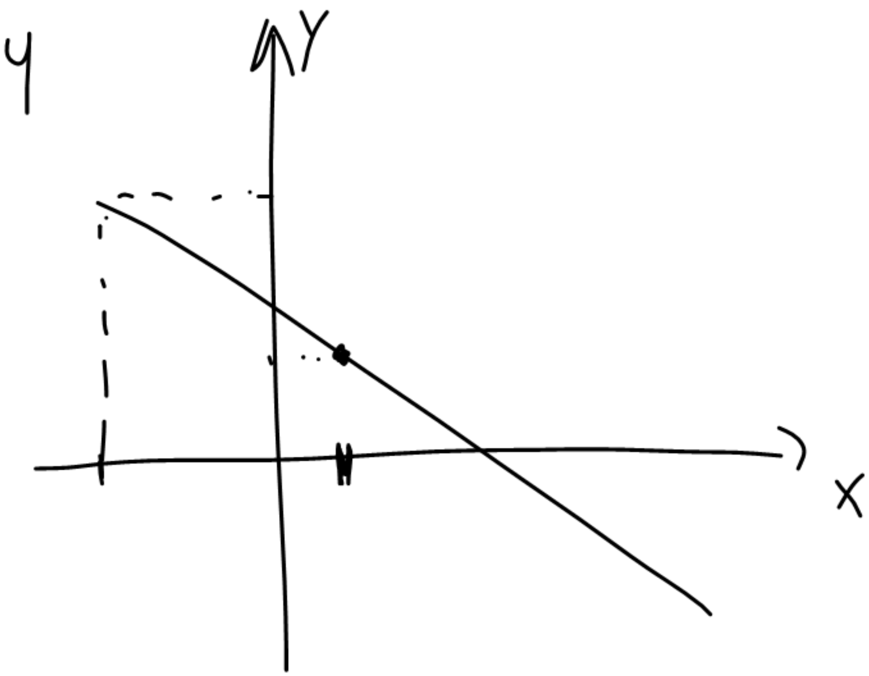
$$\exists x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \exists x P(x,y)$$

Følgende fire udsagn er parvis ikke-ækvivalente:

$$\forall x \exists y P(x,y), \quad \forall y \exists x P(x,y), \quad \exists x \forall y P(x,y), \quad \exists y \forall x P(x,y).$$

<u>EKS</u> $P(x,y)$. $2x+3y=4$

ligning for linje



$\forall x \exists y\ P(x,y)$ T

$\forall y \exists x\ P(x,y)$ T

$\exists x \forall y\ P(x,y)$ F

$\exists y \forall x\ P(x,y)$ F

EKS $\quad Q(x,y): \quad x^2 y = y^2$

$\forall x \exists y\, Q(x,y)$ T — velg $y = x^2$

$\forall y \exists x\, Q(x,y)$ F — modeksempel $y = -1 : -x^2 = 1$

$\exists x \forall y\, Q(x,y)$ F — for fast x: en andengradsligning i y, højst to y-løsning

$\exists y \forall x\, Q(x,y)$ T — velg $y = 0$

Eksempler på slutningsregler:

Modus ponens	$$\begin{array}{ll} & p \\ & p \to q \\ \hline \therefore & q \end{array}$$

Modus tollens	$$\begin{array}{ll} & \neg q \\ & p \to q \\ \hline \therefore & \neg p \end{array}$$

Hypothetical syllogism (Kædeslutningsregel)	$$\begin{array}{ll} & p \to q \\ & q \to r \\ \hline \therefore & p \to r \end{array}$$

Simplifikation	$$\begin{array}{ll} & p \wedge q \\ \hline \therefore & p \end{array}$$

Addition	$$\begin{array}{ll} & p \\ \hline \therefore & p \vee q \end{array}$$

Se flere slutningsregler i Rosen, afsnit 1.6.

EKS

Vi ved

Hvis vi har DMAT så er det Onsdag eller Fredag

Vi har DMAT

Det er ikke Fredag

Vis: det er onsdag

1.	DMAT	Givet
2.	DMAT $\to$ Onsdag $\vee$ Fredag	Givet

3	Onsdag $\lor$ Fredag	Modus ponens
4	$\neg$ Fredag	Given
5	Onsdag	Disjunctive syllogism.

$$\begin{array}{l} p \lor q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$