DMat-04

Metoder til at bevise $p \to q$:

- **Direkte bevis:** Antag p er sand og argumentér for at så er q også sand.

- **Bevis ved kontraposition** (indirekte bevis): Giv et direkte bevis for det kontrapositive udsagn: $\neg q \to \neg p$.
  Vi ved at $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$.

- **Bevis ved modstrid** (indirekte bevis): Antag $\neg(p \to q)$ og benyt dette til at komme til en modstrid.
  $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$.

Bevis ved modstrid er desuden særdeles velegnet til at bevise at noget ikke eksisterer.

<u>Sætning</u>

Hvis $r^2 = 2$ så er r irrational

<u>Bevis</u> modstrid

Antag $r^2 = 2$ og r rational. Dvs $r = \frac{a}{b}$

. . . . . Modstrid. □

$$\mathbb{R}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$$

<u>Sætning</u>

Hvis $r \in \mathbb{R}^+$ er irrational så er $\sqrt{r}$ irrational.

<u>Bevis</u> ved kontraposition

Kontrapositiv udsagn: Hvis $\sqrt{r}$ rational så r rational.

Direkte bevis for dette:

Lad $r \in \mathbb{R}^+$ og antag $\sqrt{r}$ rational.

DVS der findes $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ så $\sqrt{r} = \frac{p}{q}$

Så er $r = (\sqrt{r})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$

Da $p^2, q^2 \in \mathbb{Z}$, $q^2 \neq 0$ så er r rational.

$\square$

<u>Sætning</u>

Givet: 15 dage

Der findes 3 af dagene som er på samme ugedag.

Bevis ved modstrid

Antag dagene kan placeres så ≤ 2 på hver ugedag.

I alt har vi højst $7 \cdot 2 = 14$ dage.

Men der er 15 dage. Modstrid. $\square$

Bevis ved **inddeling i tilfælde**:
Metode til at bevise $p \to q$,
hvor p er ækvivalent med $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$:
For at bevise

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \to q$$

beviser vi det ækvivalente udsagn

$$(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q).$$

Dette gøres ved at bevise hver af de n udsagn

$$p_1 \to q, \quad p_2 \to q, \ \ldots \ \text{og} \ \ p_n \to q.$$

For at bevise at 4 udsagn p_1, p_2, p_3, p_4 er **ækvivalente**
beviser vi $p_1 \to p_2,\ p_2 \to p_3,\ p_3 \to p_4$ og $p_4 \to p_1$.

"**Definition.**" En mængde er en samling af objekter.

Lad A og B være mængder.

A og B er **samme mængde**, skrives $A = B$, hvis og kun hvis

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$ $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

A siges at være **delmængde** af B, skrives $A \subseteq B$, hvis og kun hvis $\forall x(x \in A \to x \in B)$.

Nye mængder fra andre mængder:

Potensmængde: $P(A)$ er mængden af alle delmængder af A

Kartesisk produkt: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$.

$\{2,4,3,1\} = \{1,2,3,4\}$

$\{2,1,2,2,3\} = \{1,2,3\}$

$\emptyset = \{\}$ tomme mengde

Eksempel:

Hvis $S = \{a, b, c\}$ så er

$$P(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

$$S = \{\overset{a}{\emptyset}, \overset{b}{1}, \overset{c}{\{1\}}\}$$

$$P(S) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{1, \{1\}\}, \{\emptyset, 1, \{1\}\}\}$$