DMat-05

Fra én eller flere mængder, A, B (delmængder af grundmængden U), kan vi konstruere nye mængder:

Foreningsmængde: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Fællesmængde: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

A og B siges at være disjunkte hvis $A \cap B = \emptyset$.

Mængdedifferens: $A - B = \{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\}$

Komplementærmængde: $\overline{A} = \{x \mid \neg(x \in A)\} = U - A$

Symmetrisk differens: $A \oplus B = \{x \mid (x \in A) \oplus (x \in B)\}$

Udvalgte "regneregler" for disse mængdeoperationer:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiv lov
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	distributiv lov
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	de Morgans lov
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	de Morgans lov

$$A \cup (B \cap C) = \{x \mid x \in A \lor x \in B \cap C\}$$
$$= \{x \mid x \in A \lor (x \in B \land x \in C)\}$$
$$= \{x \mid (x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)\}$$

Afsnit 1.3

$$= \{x \mid x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C\}$$

$$= \{x \mid x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\}$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Vise: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

1. $x \in \overline{A \cup B} \rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

Hvis $x \in \overline{A \cup B}$ så er $x \notin A \cup B$ og dermed

$x \notin A$ og $x \notin B$.

DVS $x \in \bar{A}$ og $x \in \bar{B}$. Altså $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

2. $x \in \overline{A} \cap \overline{B} \to x \in \overline{A \cup B}$

Tilsvarende.

EKS

For $n \in \mathbb{Z}^+$ sal $A_n = \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] =$

$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{n}\}$

$A_1 = \{0\} \subseteq A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \subseteq A_3 = \left[0, \frac{2}{3}\right] \subseteq \ldots$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = A_n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = [0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$$

En funktion $f : A \mapsto B$ opfylder at for ethvert element a i mængden A er der ét element $f(a)$ i mængden B.

Egenskab for f	for ethvert $b \in B$ findes der
injektiv	højst ét element $a \in A$ så $f(a) = b$
surjektiv	mindst ét element $a \in A$ så $f(a) = b$
bijektiv	præcis ét element $a \in A$ så $f(a) = b$

<u>EKS</u> $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ givet ved $f(n) = 2^n$

f injektiv, da $2^n = 2^m \Rightarrow n = m$

f ikke surjektiv $f(\mathbb{Z}^+) = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$

For et reelt tal $b > 0$ defineres **eksponentialfunktionen** med **grundtal** b som en funktion $f_b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$, skrives $f_b(x) = b^x$.
Egenskaber:
Hvis x er et positivt helt tal så er $b^x = b \cdot b \cdots b$, hvor der er x faktorer i produktet.
$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$
$b^{x+y} = b^x b^y$
$(b^x)^y = b^{xy}$.

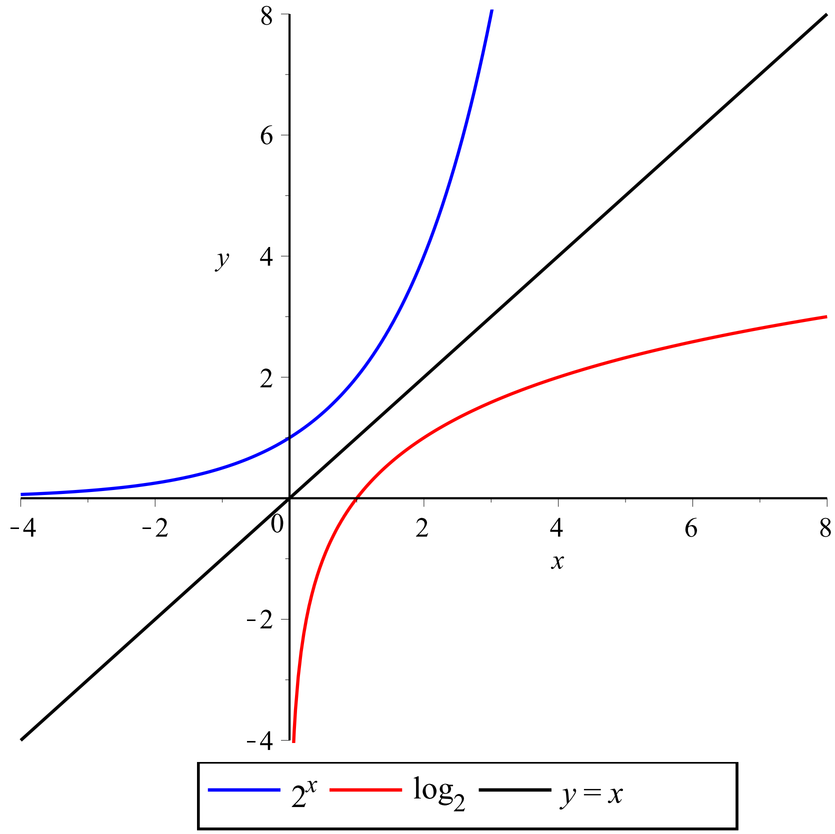
f_b er bijektiv.
Hvis $b > 1$ så er f_b voksende. Hvis $0 < b < 1$ så er f_b aftagende.

Da f_b er bijektiv så er der en invers funktion: **logaritmefunktionen** med grundtal b, $\log_b : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$.

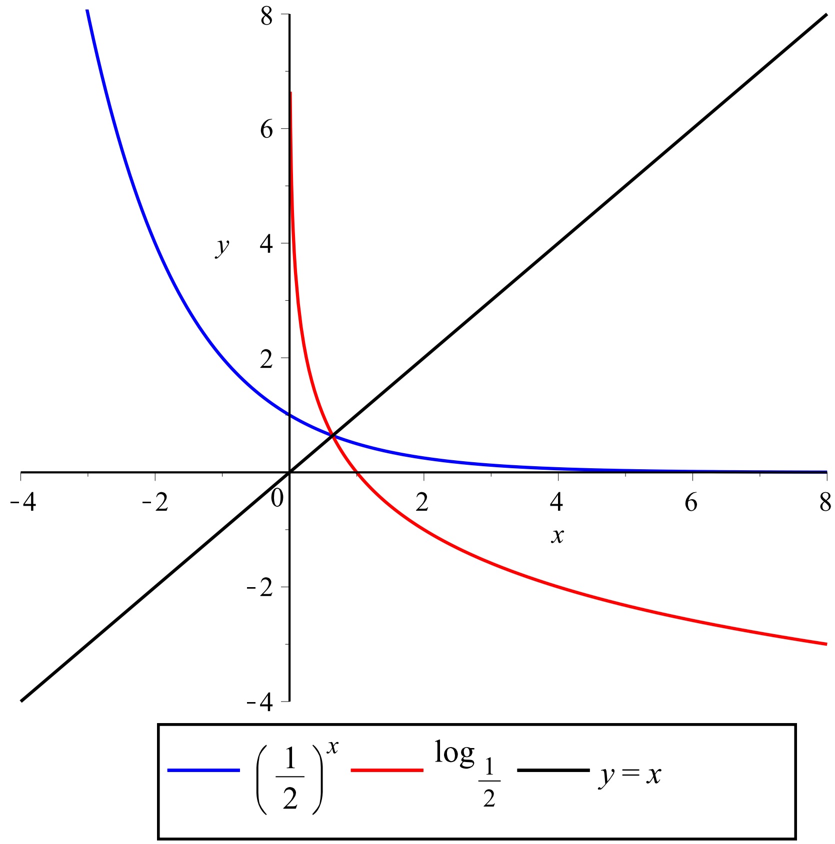
$b^{\log_b x} = x$, $\log_b b^x = x$

Egenskaber:
$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ for alle positive reelle tal x og y
$\log_b(x^y) = y \log_b x$ for alle reelle tal y og positive reelle tal x.

I DMat er $\log x = \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.



8
6
4
2
-2
-4
y
-4
-2
0
2
4
6
8
x
2^x
$\log_2$
$y = x$



8
6
4
2
-2
-4
y
-4
-2
0
2
4
6
8
x
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
$\log_{\frac{1}{2}}$
$y = x$

$$8^4 = (2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$$

$$\log 2^{15} = \log_2 2^{15} = 15 \log 2 = 15$$

$$\log_4 8^4 = \log_4 2^{12} = 12 \log_4 2 =$$

$$12 \log_4 \sqrt{4} = 12 \log_4 4^{\frac{1}{2}} = 12 \cdot \frac{1}{2} \log_4 4 = 6$$

En **følge** af elementer i mægnden S (f.eks. $S = \mathbb{R}$), skrives $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, er en funktion $a : \mathbb{N} \mapsto S$.

Eller

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$,

$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots$, hvor m er et positivt eller negativt heltal.

Eller

$a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$

Fibonacci-tallene $f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

opfylder at $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ for alle $n \geq 2$.

For en følge $\ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n, \ldots$ defineres

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n.$$

procedure $sum(m, n$:heltal, $a_m, \ldots, a_n$: tal)
$S := 0$
$i := m$
while $i \leq n$
~~**begin**~~
    $S := S + a_i$
    $i := i + 1$
~~**end**~~
$\{\ S = \sum_{i=m}^{n} a_i\ \}$

Hvis $m > n$ så $\sum_{i=m}^{n} a_i = 0$

Eksempel. $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Eksempel. $\sum_{i=0}^{n} ar^i = \frac{ar^{n+1} - a}{r-1}$, hvis $r \neq 0$, $r \neq 1$.

$$\sum_{i=6}^{11} i = 6+7+8+9+10+11 = \sum_{i=1}^{11} i - \sum_{i=1}^{5} i$$

$$\frac{11 \cdot 12}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2} = 66 - 15 = 51$$