DMat-09

For $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, lad $P(n)$ betegne et udsagn, der kan være sandt eller falsk. Sandhedsværdien kan være forskellig for forskellige værdier af n.

Induktionsprincippet: For at bevise at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$ skal vi:
Basisskridt: bevise at $P(1)$ er sand.
Induktionsskridt: bevise at der for ethvert $k \geq 1$ gælder: hvis $P(k)$ er sand så er $P(k+1)$ også sand.

Man kan eventuelt ændre alle grønne 1-taller til et andet tal b. Det røde 1-tal må ikke ændres.

Udregn: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n =$

$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n$

$n=0$: $2^0 = 1 = 2^1 - 1$

$n=1$: $2^0 + 2^1 = 1+2 = 3 = 2^2 - 1$

$n=2$: $1+2+4 = 7 = 2^3 - 1$

$n=3$: $1+2+4+8 = 15 = 2^4 - 1$

$n=4$: $1+2+4+8+16 = 31 = 2^5 - 1$

Lad $P(n)$ betegner udsagnet:

$$1+2+4+8+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$$

$P(n)$ er sand for alle $n \geq 0$

<u>Bevis</u> ved induktion

Basisskridt: $(n=0)$

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1 \quad , \quad P(0) \text{ er altså sand.}$$

<u>Induktionsskridt</u>:

Lad $k \geq 0$ og antag $P(k)$ er sand

altså $1+2+4+8+\dots+2^k = 2^{k+1}-1$

Skal vise $P(k+1)$ sand.

$$1+2+4+8+\dots+2^{k+1} =$$

$$1+2+4+8+\dots+2^{k}+2^{k+1} =$$

$$\left(2^{k+1}-1\right)+2^{k+1}$$ ifølge induktionsantagelsen

$$2\cdot 2^{k+1}-1 = 2^{k+2}-1 = 2^{(k+1)+1}-1$$

$P(k+1)$ er altså sand.

Dermed er $P(n)$ sand for alle $n \geq 0$.

EKS

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{j}$$

Lad $P(n)$ være udsagnet

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$$

$P(n)$ er sand for alle $n \geq 0$

Bevis ved induktion

Basisskridt: $(n=0)$

$$H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$$

$P(0)$ er altså Sand.

Induktionsskridt

Lad $k \geq 0$ og antag $P(k)$ er Sand

altså $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$

Skal vise $P(k+1)$ Sand.

$$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} =$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^k}} + \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$$ ifølge antagelsen

$$\geq 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 + \frac{k}{2} + \left(2^{k+1} - 2^k\right) \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}$$

Altså $P(k+1)$ er sand.

Dermed er $P(n)$ sand for alle $n \geq 0$.

H_j hvor $j = 2^n$, $n = \log j$

$$H_j \geq 1 + \frac{\log j}{2}$$

4.2: Velordningsprincippet.

Lad S være en *ikke-tom* mængde af ikke-negative hele tal.
Så har S et mindste element, altså et element $m \in S$ så $s \geq m$ for alle $s \in S$.