DMat-11

Stærk induktion.

Lad $P(n)$ betegne et udsagn, hvor $n \in \mathbb{Z}$.

Induktionsprincippet: For at bevise at $P(n)$ er sand for alle $n \geq 1$ skal vi
Basisskridt: bevise at $P(1)$ er sand.
Induktionsskridt: bevise at der for ethvert $k \geq 1$ gælder: hvis $P(1), \ldots, P(k)$ alle er sande så er $P(k+1)$ også sand.

Man kan eventuelt ændre alle blå 1-taller til et andet tal b. Det røde 1-tal må ikke ændres.

Eks 3: Spiller 1 og spiller 2 har fra start hver en bunke med n tændstikker. De skiftes til at fjerne et antal > 0 fra deres bunke. Indtil alle tændstikker er fjernet. Spiller 1 starter.
Vinder: den der sidst fjerne en tændstik.

$P(n)$ betegner udsagnet: spiller 2 kan vinde.

Påstand: $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bevis ved stærk induktion

Basis $(n=1)$ Spiller 1 fjerner tændstik
— 2 ——————

$P(1)$ er sand.

<u>Induktionsskridt</u> Lad $k \geq 1$ og antag

$P(j)$ sand for alle j, $1 \leq j \leq k$

Vise $P(k+1)$ sand.

Spiller 1 fjerner $r \geq 1$ tandstikker.

Hvis $r = k+1$ så vinder spiller 2

Ellers $r \leq k$. Rest $k+1-r$, $1 \leq k+1-r \leq k$

$P(k+1-r)$ sand

Spiller 2 fjerner r tandstikker.

Da $P(k+1-r)$ sand er $P(k+1)$ sand. $\square$

Rekursivt definerede funktioner (følger).

For at definere en uendelig følge

$$f(0), f(1), f(2), \ldots$$

skal vi

Basisskridt: angive en værdi for $f(0)$

Rekursionsskridt: for ethvert $n \geq 0$ angive hvordan man bestemmer $f(n+1)$ fra $f(0), \ldots, f(n)$.

Man kan eventuelt ændre alle blå 0'er til et andet tal b.

EKS

$a_0, a_1, \ldots,$

$$a_n = 2^n \cdot n!$$

$$a_{n+1} = 2^{n+1}(n+1)!$$

Definer a_n rekursivt:

Basis: $a_0 = 2^0 \cdot 0! = 1$

Rekursion: $a_{n+1} = 2(n+1) \cdot a_n$

EKS Følge $c_0, c_1, c_2, \ldots$

er definert rekursivt:

Basis: $c_0 = 2$

$c_1 = 1$

Rekursion: $c_{n+1} = c_n + 2c_{n-1}$ for alle $n \geq 1$

$c_2 = c_1 + 2c_0 = 1 + 2\cdot 2 = 5$, $c_3 = c_2 + 2c_1 = 5 + 2\cdot 1 = 7$

Påstand: $c_n = 2^n + (-1)^n$

Bevis ved stærk induktion

Basisskridt: $(n=0)$: $2^0+(-1)^0 = 1+1=2 = c_0$

$(n=1)$: $2^1+(-1)^1 = 2-1=1 = c_1$

Induktionsskridt

Lad $k \geq 1$ og antag $c_j = 2^j+(-1)^j$ for alle j, hvor $0 \leq j \leq k$.

Skal vise $c_{k+1} = 2^{k+1}+(-1)^{k+1}$

$c_{k+1} = c_k + 2c_{k-1} =$ (antagelse)

$$\left(2^k+(-1)^k\right) + 2\left(2^{k-1}+(-1)^{k-1}\right) =$$

$$2^k + (-1)^k + 2\cdot 2^{k-1} + 2\cdot(-1)^{k-1} =$$

$$2^k + (-1)^k + 2^k - 2\cdot(-1)^k =$$

$$2\cdot 2^k - (-1)^k = 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$$

Altså $c_n = 2^n + (-1)^n$ for alle $n \geq 0$. $\square$

Rekursivt definerede mængder.

For at definere en mængde S rekursivt skal vi
Basisskridt: angive et eller flere elementer, der tilhører S
Rekursionsskridt: angive en eller flere regler, der hver ud fra et eller flere elementer i S konstruerer et nyt element i S.

Rekursiv definition af strenge over et alfabet Σ.

Lad Σ være et alfabet (en endelig mængde af symboler).

Mængden af strenge over Σ betegnes Σ^* og defineres rekursivt ved

Basisskridt: $\lambda \in \Sigma^*$, hvor λ (lambda) betegner den tomme streng.

Rekursionsskridt: Hvis $w \in \Sigma^*$ og $x \in \Sigma$, så er $wx \in \Sigma^*$.

EKS $\Sigma = \{a, b, c\}$

$w_0 = \lambda \in \Sigma^*$, $w_1 = w_0 b = \lambda b = b$

$$w_2 = w_1 a = ba \in \Sigma^*,$$

$$w_3 = w_2 b = bab \in \Sigma^*$$

Rekursiv definition af formler

Sammensatte udsagn (well-formed formulae) i udsagnslogik defineres rekursivt ved

Basisskridt:

T og **F** er sammensatte udsagn.

Hvis s er en udsagnsvariabel så er s et sammensat udsagn.

Rekursionsskridt: Hvis E og F er sammensatte udsagn så er $(\neg E)$, $(E \wedge F)$, $(E \vee F)$, $(E \rightarrow F)$, og $(E \leftrightarrow F)$ også sammensatte udsagn.

EKS: p, q : variable

$p. q$: udsagn

$(p \vee q)$: udsagn

$(\neg q)$: udsagn

$((p \vee q) \to (\neg q))$: udsagn.