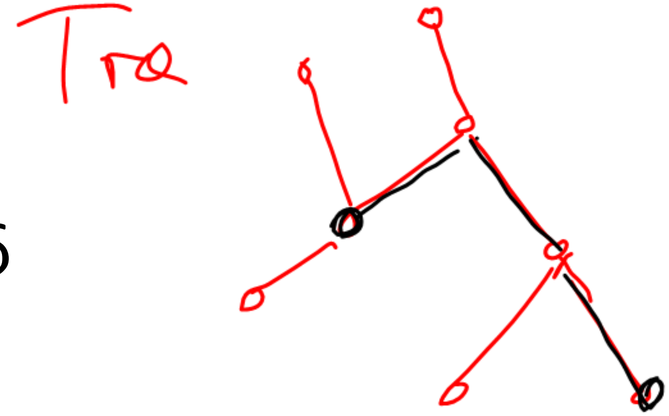


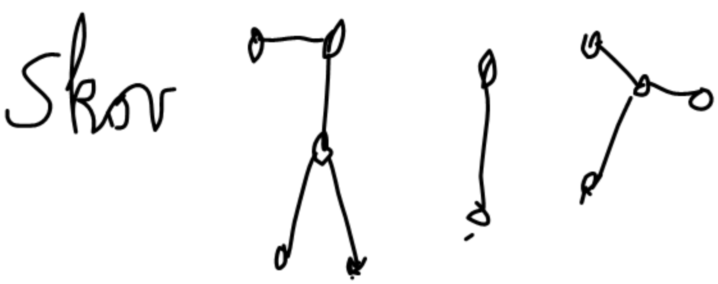
DMat-16

Definition.
Et træ er en sammenhængende ikke-orienteret graf uden simple kredse.

En skov er en ikke-orienteret graf uden simple kredse.

Et træ er altå en sammenhængende skov.

En skov er en graf hvor hver sammenhængskomponent er et træ.



Egenskaber.
Hvis T er en ikke-orienteret graf med n punkter så er følgende udsagn ækvivalente:

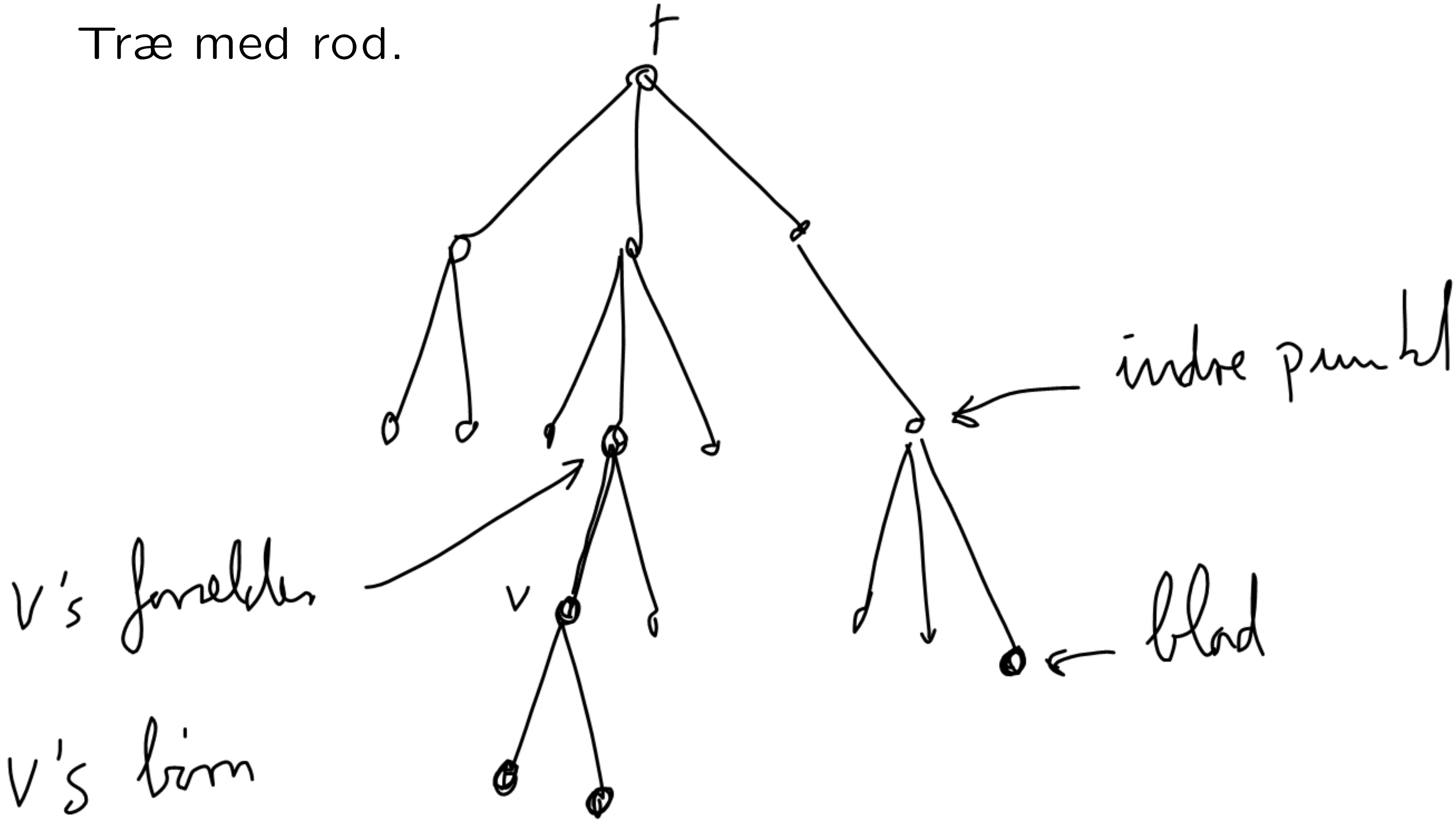
- T er et træ.

- For ethvert par af punkter u og v i T er der en entydig simpel vej fra u til v i T.

- T er sammenhængende og har $n-1$ kanter.

- T er uden simple kredse og har $n-1$ kanter.

Træ med rod.

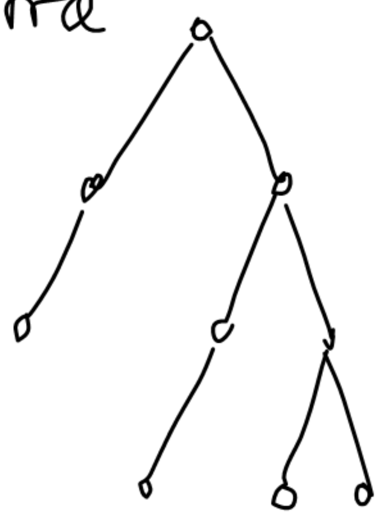


Et træ med rod er m-ært hvis hvert punkt har højst m børn.

Hvis hvert punkt har enten ingen eller præcis m børn så siges træet at være fuldt m-ært.

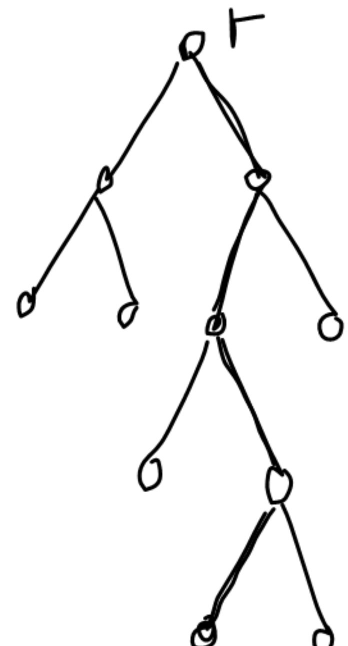
Binær betyder 2-ær.

Binært træ



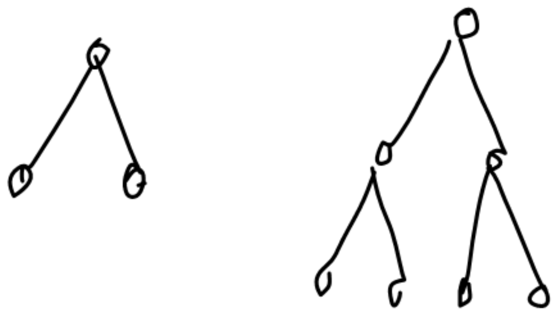
højde 3

Fuldt binært træ



højde 4

Højden h af et træ mod rod er den største afstand mellem roden og et af bladene.



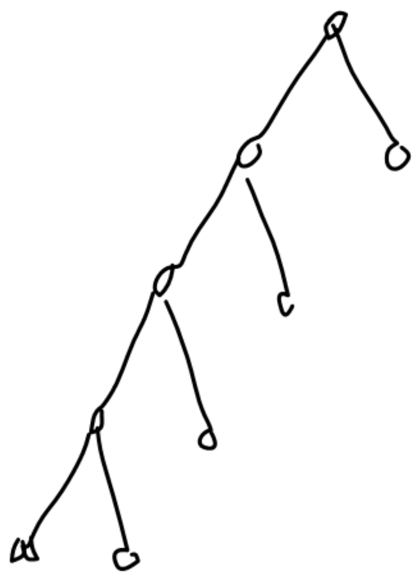
Sætning 5. Et m-ært træ med højde h har højst m^h blade.

Sætning 3+4. Et fuldt m-ært træ med i indre punkter, ℓ blade og i alt $n = i + \ell$ punkter opfylder:

$n = mi + 1 = \frac{m\ell - 1}{m-1}$ og $i = \frac{\ell - 1}{m-1}$

Fuldt binært træ $(m=2)$

$$n = 2i+1 = 2l-1 \quad , \quad i = l-1$$



$i=4$, $l=5$, $n=9$

Fuldt binært træ med højde 4 har mindst 5 blade.

Definition.

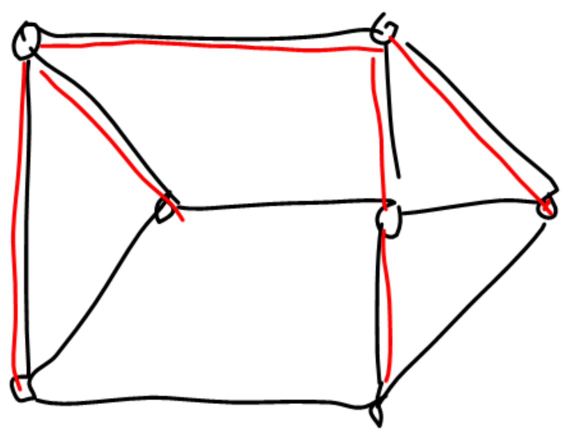
Lad G være en ikke-orienteret graf.

Hvis T er et træ, som er delgraf af G og indeholder alle G's punkter så siger vi at T er et udspændende træ i G.

Sætning.

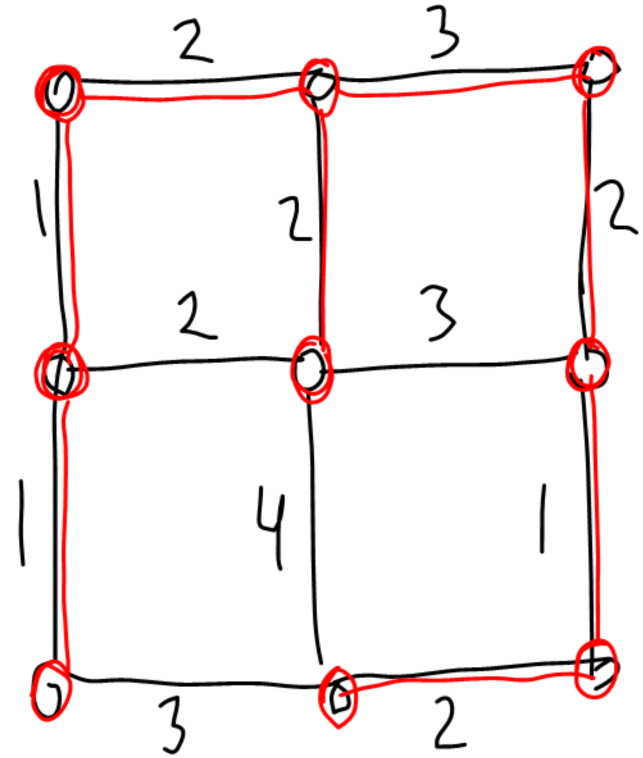
En ikke-orienteret graf G har et udspændende træ
hvis og kun hvis
G er sammenhængende.

G



Procedure Prim (G: vægtet graf med n punkter)
T := træ bestående af ét punkt
for $i := 1$ **to** $n - 1$
    e := kant med minimal vægt mellem
        et punkt i T og et punkt ikke i T
    Tilføj e og endepunkt til T

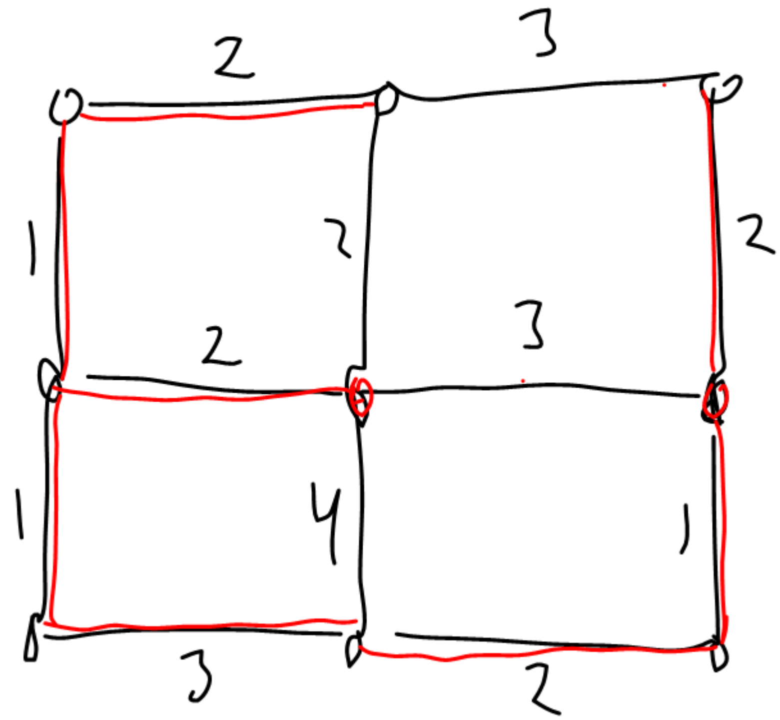
{ T er et minimum vægt udspændende træ}



2
3
1
2
2
2
3
1
4
1
3
2

Procedure Kruskal(G: vægtet graf)
sorter G's kanter $e_1, \ldots, e_m$ efter vægt så $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$.
$T :=$ skov uden kanter
for $i := 1$ **to** m
    if $T \cup \{e_i\}$ ikke har simpel kreds **then**
        $T := T \cup \{e_i\}$

$\{$ T er et minimum vægt udspændende træ.$\}$


2
3
1
2
2
2
3
1
4
1
3
2

Kompleksitet (afhænger af datastrukturer)

F. eks.

Prim : $O(n^2)$

Kruskal : $O(m \log m)$

Komplet graf K_n : $\frac{n(n-1)}{2} = m$

Kruskal : $\frac{n(n-1)}{2} \log \frac{n(n-1)}{2}$

$O(n^2 \log n)$

Eksempel 1.

G : komplet graf med punkter $v_1, \ldots, v_6$.
Kanterne har vægt angivet i følgende tabel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prims algoritme kan vælge følgende kanter:
$\{v_1, v_3\}$, $\{v_3, v_2\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_5, v_6\}$.

Eksempel 1, fortsat.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Kanterne sorteret efter vægt:
$\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_5, v_6\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_2, v_4\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_5\}$, $\{v_1, v_6\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_2, v_6\}$.
De røde kanter vælges af Kruskals algoritme