DMat-18

To mængder A og B har samme kardinalitet ($|A| = |B|$) hvis der findes en bijektiv funktion (one-to-one correspondence) $A \mapsto B$.

Hvis $|A| = |\{1, 2, \ldots, n\}|$ hvor $n \in \mathbb{Z}^+$ så har A kardinalitet n, skrives $|A| = n$.

$A = \{1, 2, \ldots, n\}$, $|A| = n$

Altså:
hvis der findes en bijektiv funktion $\{1, 2, \ldots, n\} \mapsto B$ så er $|B| = n$.

$|\emptyset| = 0$.

EKS

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \} =$$

$$\{ 0, 1, -1, 2, -2, \ldots \}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$$

$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ defineret ved

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2}, & n \text{ ulige} \\ \frac{n}{2}, & n \text{ lige} \end{cases}$$

er en bijektion. DVS $|\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Z}|$

Rationale tal $\mathbb{Q}$

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}^+|$$

Reelle tal

$$|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{Z}^+|$$

Hvis A er endelig, $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$

Så er $|P(A)| = 2^n$, $2^n > n$.

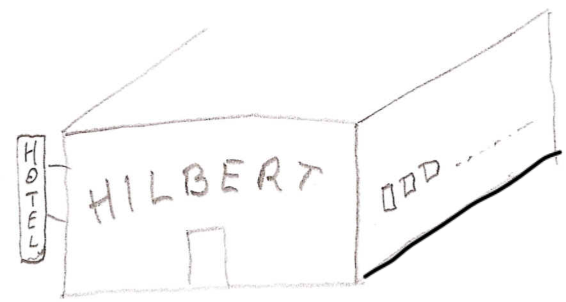
Hvis A er uendelig: $|P(A)| \neq |A|$

Hvis $|A| = n \in \mathbb{N}$ så siger vi at A er endelig. Ellers er A uendelig.

Hvis $|A| = |\mathbb{Z}^+|$ så siger vi at A har kardinalitet alef-0, $|A| = \aleph_0$.

Hvis A er endelig eller $|A| = \aleph_0$ så siger vi at A er tællelig.
Ellers er A overtællelig.

Hvis mængden A har samme kardinalitet som intervallet $[0, 1]$ så betegnes kardinaliteten af A som $|A| = c$.



Hotel Hilbert har uendeligt mange værelser numereret $1, 2, 3, \ldots$.
Alt er optaget.
Der ankommer en ny gæst.
Flyt gæsten i værelse i til værelse $i + 1$, for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.
Værelse 1 er ledigt til ny gæst.

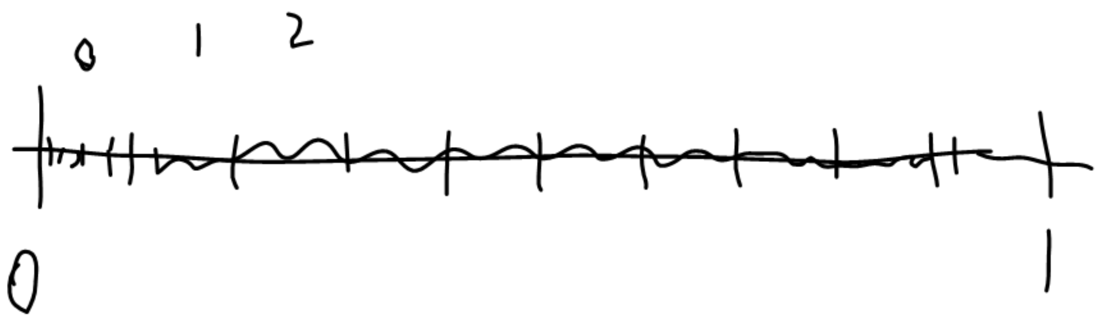
$x \in [0,1[$ kan skrives som decimal repræsentation

F. eks. $x = 0,37548\ldots$

eller x kan skrives binært

F. eks. $x = (0,0110100011\ldots)_2$

$A = \{ x \in [0,1[\mid x$ har kun 0'er og 9'er i decimal repræsentation $\}$



$f: [0,1[\ \to A$

$f((0{,}001101\ldots)_2) = 0{,}009909\ldots$

f er bijektiv. Dvs $|A| = |[0,1[| = c$

Eksempler på mængder med kardinalitet $\aleph_0$:

$\mathbb{Z}^+$

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

Enhver uendelig delmængde af $\mathbb{Q}$

Σ^*, hvor Σ er et endeligt alfabet.

$A \cup B$ og $A \times B$, hvor $|A| = |B| = \aleph_0$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, hvor $|A_i| = \aleph_0$ for alle $i \in \mathbb{Z}^+$.

Mængden af alle endelige delmængder af $\mathbb{Z}^+$.

Eksempler på mængder med kardinalitet c:

$\mathbb{R}$

Ethvert interval $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, hvor $a < b$.

$\mathbb{R}^n$, hvor $n \in \mathbb{Z}^+$.

$P(\mathbb{Z}^+)$

$$|P(\mathbb{Z}^+)| = 2^{\aleph_0} = c$$

Produktregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan opdeles i et

valg af ét af n_1 elementer

efterfulgt af

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 n_2$ elementer.

Sumregel.

Hvis valg af et element i en mængde kan udføres som enten

valg af ét af n_1 elementer

eller

valg af ét af n_2 elementer

så har mængden $n_1 + n_2$ elementer.

Skuffeprincippet

Hvis mindst $k + 1$ objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst to objekter.

Hvis N objekter placeres i k skuffer, så vil mindst én skuffe indeholde mindst $\lceil \frac{N}{k} \rceil$ objekter.

$N = 11 \quad , \quad k = 5$

$\left\lceil \frac{11}{5} \right\rceil = \lceil 2{,}2 \rceil = 3$

S: en mængde med n elementer. $r \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq n$.

En r-permutation af S er en følge af r forskellige elementer fra S: $s_1, s_2, \ldots, s_r$, hvor rækkefølge har betydning.

En r-kombination af S er en mængde af r forskellige elementer fra S: $\{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ hvor rækkefølgen er uden betydning.

2-permutationer af $\{1,2,3\} = S$

1,2	2,3
1,3	3,1
2,1	3,2

2 - kombinationer af $\{1,2,3\}$

1, 2

1, 3

2, 3

Antal r-permutation af S er

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Antal r-kombinationer af S er

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{6}{1} = 6$$

$$C(3,2) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2\cdot 1} = 3$$

En n-permutation af S, $|S|=n$ kaldes en permutation af S.

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Antal permutationer af $\{1,2,3,4\}$:

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24.$$