DMat-19

Sætning. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}$$

I siderne står 1. Andre tal er sum af de to tal over tallet.

Pascals trekant:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

$$xy = yx$$

Binomial sætningen.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$$(x+y)^5 = 1\cdot x^5 + 5\cdot x^4 y + 10\cdot x^3 y^2 + 10\cdot x^2 y^3 + 5\cdot x y^4 + 1\cdot y^5$$

$$(2x-y)^4 = \left((2x)+(-y)\right)^4 =$$

$$1\cdot(2x)^4 + 4\cdot(2x)^3(-y) + 6\cdot(2x)^2(-y)^2 + 4\cdot(2x)(-y)^3 + 1\cdot(-y)^4$$

$$2^4x^4 + 4\cdot 2^3\cdot(-1)\cdot x^3y + 6\cdot 2^2\cdot(-1)^2x^2y^2 + 4\cdot 2\cdot(-1)^3xy^3 + (-1)^4y^4$$

$$= 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

<u>EKS</u>

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

$$(x+y)^4 = (x+y)\left(\quad \cdots \; - \; - \quad \right) =$$

$$\binom{3}{0}x^4 + \binom{3}{1}x^3y + \binom{3}{2}x^2y^2 + \binom{3}{3}xy^3 +$$

$$\binom{3}{0}x^3y + \binom{3}{1}x^2y^2 + \binom{3}{2}xy^3 + \binom{3}{3}y^4 =$$

$$\binom{3}{0} x^4 + \left(\binom{3}{0} + \binom{3}{1} \right) x^3 y + \left(\binom{3}{1} + \binom{3}{2} \right) x^2 y^2 +$$

$$\left(\binom{3}{2} + \binom{3}{3} \right) x y^3 + \binom{3}{3} y^4 =$$

$$\binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 y + \binom{4}{2} x^2 y^2 + \binom{4}{3} x y^3 + \binom{4}{4} y^4$$

8.2

En lineær homogen rekursionsligning af grad 1 med konstante koefficienter:

$$a_n = c a_{n-1},$$

hvor c er en (kendt) konstant har løsning

$$a_n = c^n a_0.$$

Find løsning til $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ hvor $a_0 = 7$

Løsning: $a_n = 3^n \cdot 7$

8.2 EKS 2. Løs ligning

$$a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

hvor $a_0 = 4$, $a_1 = 2$

En lineær homogen rekursionsligning af grad 2 med konstante koefficienter:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2},$$

hvor c_1 og c_2 er (kendte) konstanter, har karakteristisk ligning

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis denne anden grads ligning har to forskellige rødder r_1 og r_2, så er løsningen til rekursionsligningen på formen:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n, \qquad (*)$$

hvor α_1 og α_2 er konstanter.

Konstanterne α_1 og α_2 kan bestemmes hvis værdierne af a_0 og a_1 er kendte. De er løsning til det lineære ligningssytem

$$\alpha_1 + \alpha_2 = a_0 \qquad \text{sæt } n = 0 \text{ i } (*)$$

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = a_1 \qquad n = 1$$

(Tilsvarende hvis a_1 og a_2 kendes eller ...).

EKS 2 ligningen: $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$

Karakteristisk ligning:

$$r^2 = 4r + 5$$

$$r^2 - 4r - 5 = 0$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot (-5) = 36$$

Røtter:
$$r_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = \frac{4+6}{2} = 5$$

$$r_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = \frac{4-6}{2} = -1$$

Altså $a_n = \alpha_1 \cdot 5^n + \alpha_2 \cdot (-1)^n$

$$a_0 = \alpha_1 + \alpha_2 = 4$$
$$a_1 = 5\alpha_1 - \alpha_2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & -18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 3$$

$$a_n = 5^n + 3 \cdot (-1)^n$$

Fibonacci tallene er løsningen til rekursionsligningen $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ med startværdier $f_0 = 0$ og $f_1 = 1$.
Den karakteristiske ligning $r^2 = r + 1$ har rødder $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Fibonacci tallene opfylder derfor

$$f_n = \alpha_1 \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \alpha_2 \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

hvor α_1 og α_2 bestemmes fra

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Vi får $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Altså

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$