!

DMat-20

Sætning

$f : \mathbb{Z}^+ \mapsto \mathbb{R}$ en voksende funktion som opfylder

$f(n) = af(\frac{n}{b}) + cn^d$, for $n = b^k$, hvor $k \in \mathbb{Z}^+$ og
$b \in \mathbb{Z}$, $b \geq 2$, $a, c, d \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$, $c > 0$, $d \geq 0$.

Hvis $a < b^d$ så er $f(n)$ $O(n^d)$.

Hvis $a = b^d$ så er $f(n)$ $O(n^d \log n)$.

Hvis $a > b^d$ så er $f(n)$ $O(n^{\log_b a})$.

$d = 0$: $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c$

EKS

$$M(n) = 2M\left(\frac{n}{2}\right) + n \quad , \text{ hvis } n = 2^k$$

$$M(1) = 1$$

$$M(2) = 2M(1) + 2 = 4$$

$$M(4) = 2M(2) + 4 = 12$$

$$M(8) = 2M(4) + 8 = 32$$

$$M(16) = 2M(8) + 16 = 80$$

$$32 = M(8) \leq M(13) \leq M(16) = 80$$

Satning med $a=2$, $b=2$, $c=1$, $d=1$

$$b^d = 2 = a$$

$$M(n) = O(n \log n)$$

Hvis $n = 2^k$: $\quad M(2^k) = 2^k (k+1)$

$$M(n) = n(\log n + 1)$$

EKS $\quad f(n) = 5f\left(\frac{n}{4}\right) + 7$, $\quad a=5, b=4, c=7$
$d=0$

$b^d = 1 < a = 5$, $f(n)$ er $O\left(n^{\log_4 5}\right)$

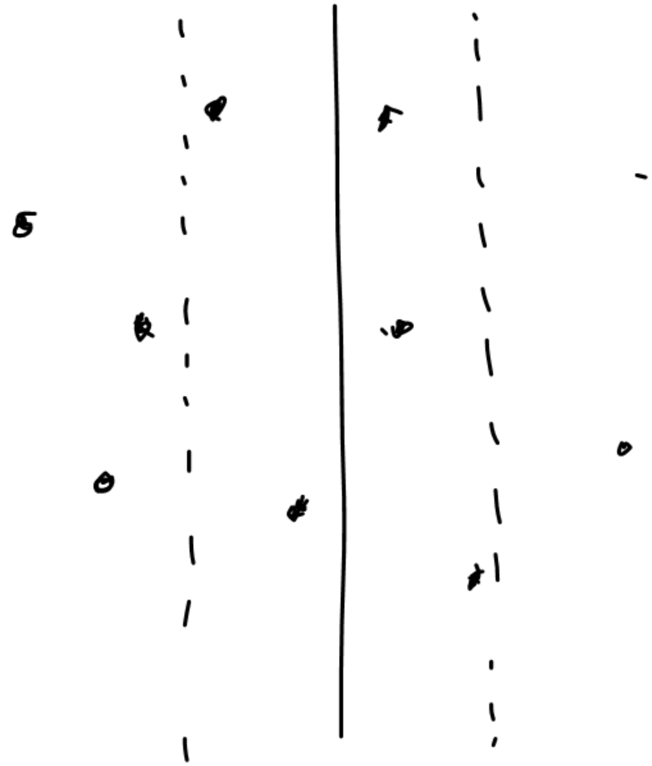
$$\log_4 5 = \frac{\ln 5}{\ln 4} = 1{,}16.$$

Eksempel på del-og-hersk algoritme.
Givet: n punkter i planen. Find punkt-par med mindst afstand.

Lav en liste med punkterne sorteret efter voksende x-koordinat. Lav en anden liste med punkterne sorteret efter voksende y-koordinat.

Tag de første $\frac{n}{2}$ punkter fra første liste. Disse punkter ligger til venstre for eller på en lodret linie ℓ. De øvrige punkter ligger til højre for eller på linien ℓ.

Find (rekursivt) den mindste afstand d_L mellem den venstre halvdel af punkterne
og den mindste afstand d_R mellem den højre halvdel af punnkterne.



Sæt $d = \min\{d_L, d_R\}$.

Lad $P_1, \ldots, P_m$ være de punkter,der har afstand højst d fra ℓ, sorteret efter voksende y-koordinat.

For hvert i: bestem afstanden fra P_i til punkterne $P_{i+1}, \ldots, P_{i+7}$.

Lad $f(n)$ betegne antal operationer der kræves (efter de to indledende sorteringer) for at findes minimum afstand med denne algoritme.

$f(n)$ er ifølge Sætning

$$O(n \log n).$$

$$f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

9.1: Relationer

Lad A og B være mængder.
En (binær) relation fra A til B er en delmængde $R \subseteq A \times B$.
En (binær) relation på A er en delmængde $R \subseteq A \times A$.
$(a, b) \in R$ skrives aRb.

En funktion fra A til B er en relation f fra A til B, der opfylder at for ethvert element $a \in A$ findes der præcis ét element $b \in B$ sådan at afb (skrives $f(a) = b$).

A relation R på en mængde A siges at være

- refleksiv hvis aRa for alle $a \in A$ $\quad (a,a) \in R$
- symmetrisk hvis $aRb \Leftrightarrow bRa$ $\quad (a,b) \in R \iff (b,a) \in R$
- antisymmmetrisk hvis $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitiv hvis $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ $\quad (a,b) \in R\ ,\ (b,c) \in R$
  $\Rightarrow (a,c) \in R.$

EKS $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,4), (2,2)\}$

$R^{-1} = \{(2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (4,3), (2,2)\}$

ikke refleksiv, ikke symmetrisk,

antisymmetrisk

transitiv: $(1,2), (2,4) \in R$ $\quad (1,4) \in R$

$(1,2), (2,2) \in R$ $\quad (1,2) \in R$

$(1,3), (3,4) \in R$ $\quad (1,4) \in R$

EKS $\quad A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3),$$
$$(3,4), (4,3), (4,4)\}$$

S er refleksiv, symmetrisk

ikke transitiv $\quad (1,2), (2,3) \in S$

men $(1,3) \notin S$.

Hvis R er en relation fra A til B
og S er en relation fra B til C
så defineres en relation $S \circ R$ fra A til C ved

$$a(S \circ R)c \Leftrightarrow \exists b \in B(aRb \wedge bSc).$$

Hvis R er en relation på A så defineres R^n, $n \in \mathbb{Z}^+$ ved
$R^1 = R$ og $R^{n+1} = R^n \circ R$, for $n \geq 1$.

$R^2 = R \circ R$

Hvis R er en relation på A så defineres den inverse relatation
$R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$.