DMat-19

Sætning. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Pascals trekant:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3}
\end{array}
$$

I siderne står 1. Andre tal er sum af de to tal over tallet.

Pascals trekant:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Binomial sætningen.

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

8.2

En lineær homogen rekursionsligning af grad 1 med konstante koefficienter:

$$a_n = ca_{n-1},$$

hvor c er en (kendt) konstant har løsning

$$a_n = c^n a_0.$$

En lineær homogen rekursionsligning af grad 2 med konstante koefficienter:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2},$$

hvor c_1 og c_2 er (kendte) konstanter, har karakteristisk ligning

$$r^2 = c_1 r + c_2.$$

Hvis denne anden grads ligning har to forskellige rødder r_1 og r_2, så er løsningen til rekursionsligningen på formen:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n,$$

hvor α_1 og α_2 er konstanter.

Konstanterne α_1 og α_2 kan bestemmes hvis værdierne af a_0 og a_1 er kendte. De er løsning til det lineære ligningssytem

$$\alpha_1 + \alpha_2 = a_0$$

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = a_1$$

(Tilsvarende hvis a_1 og a_2 kendes eller ...).

Fibonacci tallene er løsningen til rekursionsligningen $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ med startværdier $f_0 = 0$ og $f_1 = 1$. Den karakteristiske ligning $r^2 = r + 1$ har rødder $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Fibonacci tallene opfylder derfor

$$f_n = \alpha_1 \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \alpha_2 \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n,$$

hvor α_1 og α_2 bestemmes fra

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \alpha_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Vi får $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Altså

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n.$$