Facit til eksamen i Diskret Matematik

Mandag den 6. juni 2011, kl. 9.00–13.00.

Opgave 1

Definér $f : A \mapsto B$ ved $f(x) = 3x + 6$.
For $y \in B$ har $f(x) = y$ entydig løsning $x = \frac{y-6}{3}$. Løsningen tilhører A.
f er derfor en bijektion og $|A| = |B|$.

Opgave 2

Vis at $f(x) = x^3 - 2x + 1$ er $O(x^3)$.
Hvis $x > 2$ er $x^3 - 2x + 1 > 0$ og dermed er
$|f(x)| = |x^3 - 2x + 1| = x^3 - 2x + 1 < x^3 + 1 < 2x^3 = 2|x^3|$.
Så med $K = 2, C = 2$ er $|f(x)| < C|x^3|$ for alle $x > K$.

Opgave 3

$$k \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad k \leq n \quad \wedge \quad s = k^2. \tag{1}$$

Før første gennemløb af løkken er $k = 0$ og $s = 0$ og dermed er (1) sand.
1. Antag (1) er sand før et gennemløb. Betingelsen $k < n$ er også sand.
Efter gennemløbet:
$k_{\text{ny}} = k + 1 \leq n$ og $k_{\text{ny}} \in \mathbb{N}$ da $k < n$ og $k \in \mathbb{N}$
$s_{\text{ny}} = (s + k) + k_{\text{ny}} = s + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2 = k_{\text{ny}}^2$.
(1) er altså sand for de nye værdier af k og s. Dermed er (1) en invariant.
2. Når while-løkken standser er betingelsen $k < n$ falsk, men (1) er sand. Derfor er $k = n$ og $s = k^2 = n^2$.

Opgave 4

$(x - y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4(-y) + \binom{5}{2}x^3(-y)^2 + \binom{5}{3}x^2(-y)^3 + \binom{5}{4}x(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$.

Opgave 5

$66 = 54 + 12$ $\qquad$ $12 = 66 - 54$
$54 = 4 \cdot 12 + 6$ $\qquad$ $6 = 54 - 4 \cdot 12 = 54 - 4(66 - 54) = 5 \cdot 54 - 4 \cdot 66$
$12 = 2 \cdot 6 + 0$
Altså $\gcd(54, 66) = 6 = 5 \cdot 54 - 4 \cdot 66$, $s = 5, t = -4$.

Opgave 6

1. $a_3 = 2a_2 + a_1 = 27$, $a_4 = 2a_3 + a_2 = 67$.
2. Vis at $a_n \leq 3^n$ for alle $n \geq 3$.
Bevis ved stærk induktion.
Basisskridt: sandt for $n = 3$ og $n = 4$.
Induktionsskridt: Lad $k \geq 4$ og antag at $a_n \leq 3^n$ for alle n, hvor $3 \leq n \leq k$. Så er
$a_{k+1} = 2a_k + a_{k-1} \leq 2 \cdot 3^k + 3^{k-1} \leq 2 \cdot 3^k + 3^k = 3^{k+1}$.
Påstanden er også sand for $n = k + 1$ og dermed for alle $n \geq 3$.

Opgave 7

Vis at

$$n(T) = 2\ell(T) - 1.$$

(Bemærk at dette følger af sætning 10.1.4(iii), men i opgaven skal vi give et bevis ved hjælp teorien fra afsnit 4.3.)
Bevis ved strukturel induktion.
Basisskridt: Hvis T er træ der består af ét punkt (roden) så er $n(T) = 1$ og $\ell(T) = 1$. Dermed er $n(T) = 2\ell(T) - 1$.
Rekursionsskridt: Lad T_1 og T_2 være fulde binære træer og antag at $n(T_1) = 2\ell(T_1) - 1$ og $n(T_2) = 2\ell(T_2) - 1$.
Lad T være det fulde binære træ $T = T_1 \cdot T_2$. Så er
$n(T) = 1 + n(T_1) + n(T_2) = 1 + 2\ell(T_1) - 1 + 2\ell(T_2) - 1 = 2(\ell(T_1) + \ell(T_2) - 1 = 2\ell(T) - 1$.
T opfylder altså også påstanden, som dermed er sand for alle fulde binære træer.

Opgave 8

Da $1234 \equiv 4 \pmod{10}, 4567 \equiv 7 \pmod{10}$ og $5555 \equiv 5 \pmod{10}$ er
$(1234 \cdot 4567 + 5555) \equiv 4 \cdot 7 + 5 \equiv 33 \equiv 3 \pmod{10}$.
Altså $(1234 \cdot 4567 + 5555) \mod 10 = 3$.

Opgave 9

v	a	b	c	d	e	f	g	S
$L(v)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
		3	1			5		a
		2			3			c
				4				b
						4		e
							8	d
							6	f
								g

Længden af en korteste vej fra a til g er 6.

Opgave 10

Kanter tilføjes f.eks. i denne rækkefølge:
$\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{d,e\}$, $\{e,f\}$, $\{b,d\}$, $\{f,g\}$.

Opgave 11

Hvis punkterne nævnes i rækkefølgen a, b, c, d, e, f, g er nabomatricen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Opgave 12

$7 = 1 \cdot 5 + 2$ $\qquad$ $2 = 7 - 5$
$5 = 2 \cdot 2 + 1$ $\qquad$ $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7-5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$
Altså $\gcd(5,7) = 1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$.

En løsning:
$x = 2 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 7 = -12$
En anden løsning:
$x = -12 + 5 \cdot 7 = 23$.
Generelt: x er løsning hvis og kun hvis $x \equiv 23 \pmod{35}$.