# Facit til prøve-eksamen2 i Diskret Matematik

---

## Opgave 1

Når $x > 1$ er $\log(x) > 0$ og
$|f(x)| = |3x + 4 + \log(x)| = 3x + 4 + \log(x) > 3x = 3|x|$.
Altså: for $K = 1, C = 3$ er $|f(x)| > C|x|$ for alle $x > K$. Dermed er $f(x)$ $\Omega(x)$.

## Opgave 2

$5^{19} \mod 19 = 5$, ifølge Fermats lille sætning (3.7.5), da 19 er primtal.

## Opgave 3

$$i \in \mathbb{N} \ \wedge \ i \leq n \ \wedge \ x = 2^i \ \wedge \ s = 1 - \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Før første gennemløb er $s = 0, i = 0, x = 1$ og (1) er sand (da $n \geq 0$).
1. Antag (1) er sand før et gennemløb. Da løkken udføres er betingelsen $i < n$ sand.
Efter gennemløbet:
$i_{\text{ny}} = i + 1$. Da $i < n$ og $i \in \mathbb{N}$ er $i_{\text{ny}} \leq n$ og $i_{\text{ny}} \in \mathbb{N}$.
$x_{\text{ny}} = 2x = 2 \cdot 2^i = 2^{i_{\text{ny}}}$.
$s_{\text{ny}} = s + \frac{1}{x_{\text{ny}}} = 1 - \frac{2}{2x} + \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{2x} = 1 - \frac{1}{x_{\text{ny}}}$.
(1) er altså sand efter gennemløbet af løkken og (1) er en invariant.
2. Når while-løkken standser er betingelsen $i < n$ falsk, men (1) er sand.
Dermed er $i = n$ og $s = 1 - \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Og så er $t = 1 - s = \frac{1}{2^n}$.

## Opgave 4

1. Lad $T_1 = \emptyset \cdot \emptyset$, $T_2 = \emptyset \cdot \emptyset$ og $T_3 = \emptyset \cdot \emptyset$ (træer med et punkt). Så er $\ell(T_1) = \ell(T_2) = \ell(T_3) = 1$.
Lad $T_4 = T_2 \cdot T_3$. Så er $\ell(T_4) = \ell(T_2) + \ell(T_3) = 2$.
Nu er $T = T_1 \cdot T_4$ og $\ell(T) = \ell(T_1) + \ell(T_4) = 3$.
2. For ethvert udvidet binært træ $T$ er $\ell(T) \leq 2^{h(T)}$ (*)
Bevis ved strukturel induktion.
Basisskridt $T = \emptyset$: $\ell(T) = 0 < 2^{h(T)} = 2^{-1}$.
Rekursionsskridt: Lad $T_1$ og $T_2$ være udvidede binære træer som opfylder (*).
Lad $T = T_1 \cdot T_2$.

Hvis $T_1$ og $T_2$ begge er tomme træer så er $h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2)) = 0$ og $\ell(T) = 1 = 2^0 = 2^{h(T)}$.
Hvis enten $T_1$ eller $T_2$ (eller begge) er ikke-tom kan vi antage at $h(T_1) \geq h(T_2)$ (da $h(T_2) \geq h(T_1)$ er tilsvarende) og så er:
$h(T) = 1 + \max(h(T_1), h(T_2)) = 1 + h(T_1)$.
$\ell(T) = \ell(T_1) + \ell(T_2) \leq 2^{h(T_1)} + 2^{h(T_2)} \leq 2^{h(T_1)} + 2^{h(T_1)} = 2 \cdot 2^{h(T_1)} = 2^{h(T)}$.
$T$ opfylder altså også (*), som dermed er sand for ethvert udvidet binært træ.

## Opgave 5

Afhænger numerering af punkterne. F.eks.:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## Opgave 6

1.

| $p$ | $q$ | $q \to p$ | $p \to (q \to p)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |

2. $p \to (q \to p)$ er en tautologi, da der er T i alle rækker.

## Opgave 7

En talfølge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er defineret rekursivt ved

- $a_0 = 4, a_1 = 0$,
- $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, for alle $n \geq 2$.

1. $a_2 = 2a_1 + 3a_0 = 12$, $a_3 = 2a - 2 + 3a_1 = 24$
2. $3 \mid a_n$ for alle $n \geq 1$.

Bevis ved induktion.
Basisskridt $n = 1$: $3 \mid a_1 = 0$
Induktionsskridt: Lad $k \geq 1$ og antag $3 \mid a_k$. Så er
$a_{k+1} = 2a_k + 3a_{k-1}$. Da 3 går op i $a_k$ går 3 også op i $a_{k+1}$.
Dermed er $3 \mid a_n$, for alle $n \geq 1$.

## Opgave 8

Find alle hele tal $x$ der opfylder

$$x \equiv 0 \pmod 2 \quad \wedge \quad x \equiv 3 \pmod 7 \quad \wedge \quad x \equiv 2 \pmod 9.$$

Sæt $m_1 = 2, m_2 = 7, m_3 = 9, m = 2 \cdot 7 \cdot 9 = 126, a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 2, M_1 = 63, M_2 = 18, M_3 = 14$.
Så er følgende en løsning:
$x = a_1M_1y_1 + a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 = a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3$, hvor $y_i$ er invers til $M_i$ modulo $m_i$.
$\gcd(m_2, M_2) = \gcd(7, 18) = 1 = 2 \cdot 18 - 5 \cdot 7$, altså $y_2 = 2$, da
$18 = 2 \cdot 7 + 4$ $\qquad$ $4 = 18 - 2 \cdot 7$.
$7 = 1 \cdot 4 + 3$ $\qquad$ $3 = 7 - 4 = 7 - (18 - 2 \cdot 7) = 3 \cdot 7 - 18$
$4 = 1 \cdot 3 + 1$ $\qquad$ $1 = 4 - 3 = (18 - 2 \cdot 7) - (3 \cdot 7 - 18) = 2 \cdot 18 - 5 \cdot 7$.
Tilsvarende $\gcd(m_3, M_3) = \gcd(9, 14) = 1 = 2 \cdot 14 - 3 \cdot 9$, altså $y_3 = 2$.
En løsning: $x = a_2M_2y_2 + a_3M_3y_3 = 3 \cdot 18 \cdot 2 + 2 \cdot 14 \cdot 2 = 164$.
Anden løsning: $x = 164 - 126 = 38$.
Generelt: $x$ er løsning hvis og kun hvis $x \equiv 38 \pmod{126}$.

## Opgave 9

Løsning

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Opgave 10

1. Længden af kortest vej fra $a$ til $g$ er 9.
2. $a, b, d, e, f, c, g$.

## Opgave 11

$(2x + y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3y + \binom{4}{2}(2x)^2y^2 + \binom{4}{3}(2x)^1y^3 + \binom{4}{0}y^4 = 16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$.