Lineær algebra - 9

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix, altså $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. A er $m \times n$.
Nulrummet af T er mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Følgende betingelser er ækvivalente

- T er **enentydig (injektiv)**
- nulrummet af T er $\{\mathbf{0}\}$
- A har pivot i alle søjler

EKS

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linear

Standardmatrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{ref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_4 &= 0 \\ x_2 + 9x_4 &= 0 \\ x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_4 \\ -9x_4 \\ 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nulrum of T:

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

T er ikke enentydig

$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ linear

Standardmatrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{ref}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U er enentydig.

Lad $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ være en lineær transformation og lad A være dens standardmatrix. A er $m \times n$.
Følgende betingelser er ækvivalente

- T har en **invers funktion**
- T er enentydig og på
- rank $A = n = m$
- A har en invers matrix.

Den inverse funktion af T er da den lineære transformation med standardmatrix A^{-1}.

Sammensat funktion

Hvis $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ og $S : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ er lineære transformationer med standardmatricer henholdsvis A og B, så er

$$S \circ T = ST : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

en lineær transformation med standardmatrix BA.

Altså

$$T_B T_A = T_{BA}.$$

Fra side 2-3: $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T = T_A$

$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ $\quad U = T_B$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\quad U(\vec{v}) \in \mathbb{R}^4$, $\quad T(U(\vec{v})) \in \mathbb{R}^3$

$TU : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ linear

Standardmatrix

$$\underset{3\times 4}{A}\;\underset{4\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{}$$

3.1: **Determinanter**

A: en $n \times n$ matrix.
På plads (i, j) står der a_{ij}.

A_{ij}: en $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fås fra A ved at fjerne række i og søjle j.

Definition af determinant.

$n = 1$: $\quad \det[a_{11}] = a_{11}$

$n \geq 2$: $\quad \det A =$

$$a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} - \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det A_{11} = 2 \det [9] - 3 \det [6] = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 0$$

$$\det A_{12} = 1 \cdot 9 - 3 \cdot 7 = -12$$

$$\det A_{13} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = -8$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= 2 \cdot 0 - 3 \cdot (-12) + 4\,(-8)$$

$$= 36 - 32 = 4$$

(i, j)-cofaktor: $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition af determinant:

$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$.

$n = 2$: $\quad \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,

og hvis $ad - bc \neq 0$ så er matricen invertibel med invers

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$