Lineær algebra - 14

Koordinatsystemer.

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ er basis for et underrum V af $\mathbb{R}^n$ så findes der for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$ entydige tal $c_1, c_2, \ldots, c_k$ så

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_k\mathbf{b}_k.$$

$\mathcal{B}$ udspænder V. Det betyder at $\mathbf{v}$ på mindst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ er lineært uafhængig. Det betyder at $\mathbf{v}$ på højst én måde kan skrives som linearkombination af $\mathcal{B}$.

Koordinatvektor. (defineres kun for $V = \mathbb{R}^n$.)

Hvis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$
(hvor rækkefølgen af basisvektorerne er fastlagt)
så defineres koordinatvektoren for $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ m.h.t. $\mathcal{B}$ som

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \ldots c_n\mathbf{b}_n$.

Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, hvor $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^n$ og $B = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n]$ som er en $n \times n$ matrix.

Så er $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ hvis og kun hvis B er invertibel.

Hvis $\mathcal{B}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ så kan koordinatvektorer m.h.t. $\mathcal{B}$ bestemmes ved

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = B^{-1}\mathbf{v}.$$