3.1

A: $n \times n$ matrix

Udvikling efter række i:

$$\det A = a_{i1} c_{i1} + a_{i2} c_{i2} + \dots + a_{in} c_{in}$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Udvikling efter række 2:

$$\det A = (-1)^{2+1} a_{21} \det A_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} \det A_{22}$$

$$+ (-1)^{2+3} a_{23} \det A_{23} =$$

$$- a_{21} \det A_{21} + a_{22} \det A_{22} - a_{23} \det A_{23} =$$

$$-1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$-(3\cdot 9-4\cdot 6)+2(2\cdot 9-4\cdot 7)-3(2\cdot 6-3\cdot 7)=$$

$$-3+2\cdot(-10)-3(-9)=-3-20+27=4$$

Fortegn i cofaktor

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & & \end{bmatrix}$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

øvre triangulær

Udvikling efter række 4:

$$\det A = -0 \cdot \det A_{41} + 0 \cdot \det A_{42} - 0 \cdot \det A_{43} + 2 \cdot \det A_{44}$$

$$= 2 \cdot \det \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}}_{B} =$$

Udvikling efter række 3

$$2\left(0 \cdot \det B_{31} - 0 \cdot \det B_{32} + (-5) \cdot \det B_{33}\right) =$$

$$2 \cdot (-5) \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 3 \cdot 4$$

= produkt af tal på diagonal

$$\det I_n = 1$$

3.2 Determinant of elementary matrices

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 \xrightarrow{R_4 + 7R_2 \to R_4} E$$

$$\det E = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

nedre triangulær

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det E = 1 \cdot 1 \cdot k \cdot 1 = k$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

øvre triangulær

$$\begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$$

nedre triangulær

$$I_4 \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

$$\det E = \qquad \text{(Udv. efter række 4)}$$

$$1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \qquad \text{(Udv. efter række 2)}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

Setning 3.3

A, B: $n \times n$ matriser

B fås fra A ved radoperasjon

1. $A \xrightarrow{R_i + cR_j \to R_i} B$ Så er $\det B = \det A$

2. $A \xrightarrow{R_i \longleftrightarrow R_j} B$ Så er $\det B = -\det A$

3. $A \xrightarrow{kR_i \to R_i} B$ Så er $\det B = k \cdot \det A$

$$\det A = \frac{1}{k} \det B$$

Ex 5

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 7R_1 \to R_3 \\ = \end{array}$$

$$-\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -12 \end{bmatrix} \overset{-R_2 \to R_2}{=} -\frac{1}{-1} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & -12 \end{bmatrix}$$

$R_3 + 8R_2$

$$= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$$

<u>EKS</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad 2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 \\ 14 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\det(2A) = 2^3 \cdot \det A = 2^3 \cdot 4$$

Egenskaber ved determinant

Sætning 3.4

A, B: $n \times n$ matricer.

a) A er invertibel $\iff$ $\det A \neq 0$

b) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

c) $\det A^T = \det A$

d) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ hvis A invertibel

d) $$A A^{-1} = I_n$$

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

EKS