4.2 Basis

Sætning 4.3

V: et underrum af $\mathbb{R}^n$

Hvis $\text{span}\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k\} = V$

Så findes en delmængde af $\{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k\}$

som er basis for V.

Metoden $A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k] \xrightarrow{\text{red}} [\quad]$

Søjler i A med pivot udgør basis.

<u>Sætning 4.4</u> (udvidelse)

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$

Hvis $\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k\}$ er lineært uafhængig mængde af vektorer i V

Så er enten

$\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k\}$ en basis for V

eller der findes $\vec{v}_{k+1} \in V$, $\vec{v}_{k+1} \notin \text{Span}\{\vec{v}_1 \ldots \vec{v}_k\}$

og $\{\vec{v}_1, \ldots\ldots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}\}$ er lineært uafhængig

Gentag indtil vi får en basis.

Hvis $V \neq \{\vec{0}\}$ så har V en basis

(faktisk: uendeligt mange)

EKS på udvidelse

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$$= \mathrm{Null} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ underrum af $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \in V$$

$\{\vec{v}_1\}$ er lineært uafhængig.

Udvid til en basis.

Løsning $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

x_2, x_3, x_4 frie variable

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Null}\, A = \mathrm{Col}\, B$ har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Sætning 4.5 + Definition af Dimension

V : et underrum af $\mathbb{R}^n$, $V \neq \{\vec{0}\}$

Der findes et tal $\dim V$, dimension af V så enhver basis for V består af $\dim V$ vektorer.

Desuden definerer $\dim \{\vec{0}\} = 0$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Underrum af $\mathbb{R}^3$:

- $\dim \{\vec{0}\} = 0$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$
- Hvis V er en linie i $\mathbb{R}^3$ gennem $\vec{0}$ så er $\dim V = 1$
- Hvis V er en plan i $\mathbb{R}^3$ gennem $\vec{0}$

så er $\dim V = 2$.

Satning 4.7

V: et underrom af $\mathbb{R}^n$, $\dim V = k$

Hvis $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k \in V$

og enten $\{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k\}$ er lineart uafhængig

eller $\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = V$

Så er $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ en basis for V.

EKS

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$$

$\dim V = 3$. Vi fandt basis med 3 vektorer.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\dim V$ vektorer der ligger i V

og de er lineært uafhængige, da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

har pivot i alle søjler

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ er altså basis for V.

4.3 A: $m \times n$ matrix

Col A underrum af $\mathbb{R}^m$

En basis for A: søjler i A med pivot.

$\dim \operatorname{Col} A$ = antal søjler med pivot
= rank A

Null A underrum af $\mathbb{R}^n$

$\dim \operatorname{Null} A$ = antal frie variable
= antal søjler uden pivot

$= n - \text{rank } A$

$= \text{nullitet af } A.$

Row A rækkerum

underrum af $\mathbb{R}^n$ udspændt af A's rækker.

Eks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row } A = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \right\} = \text{Col } A^T$$

$$A \xrightarrow{\text{elementær rækkeoperation}} B$$

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} B$$

$$\operatorname{Row} A = \operatorname{Row} \operatorname{ref}(A)$$

EKS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ref}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row } A = \text{Row } R = \text{Span}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{Basis for Row } A}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}_R$$